

Carlo Felice Manara

L'evoluzione della matematica nel XIX secolo

Estratto da

STORIA delle SCIENZE/2

diretta da Evandro Agazzi

Città Nuova Editrice

Roma 1984

XIV

L'evoluzione della matematica nel XIX secolo

di CARLO FELICE MANARA

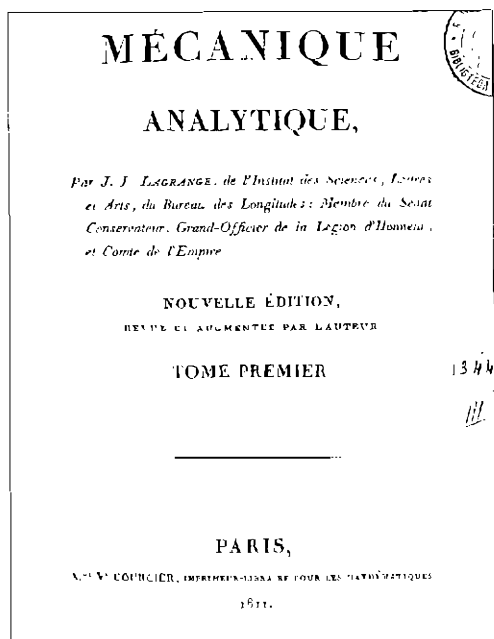
La matematica nel XIX secolo - La geometria nel XIX secolo: Introduzione; L'ampliamento dello spazio e la geometria proiettiva; La classificazione di Klein; La geometria differenziale; La geometria algebrica; I problemi del continuo geometrico; I problemi logici dei fondamenti della geometria; Considerazioni conclusive - L'analisi matematica nel XIX secolo: Introduzione; Il concetto di limite e la costruzione del campo reale; L'evoluzione del concetto di funzione; La costruzione del campo complesso. Le funzioni monogene; L'opera di G. Cantor e la teoria degli insiemi - La meccanica razionale e la fisica matematica: Introduzione; La meccanica classica. I campi. La meccanica celeste; I sistemi di punti. Le equazioni di Lagrange; Il superamento della meccanica classica. I fenomeni irreversibili. Teoria del calore e termodinamica; I grandi principi della fisica matematica. Conservazione e ottimizzazione - I nuovi rami della matematica: Introduzione; La teoria dei gruppi. La teoria delle equazioni. Nascita dell'algebra astratta; Le origini della topologia; Il calcolo delle probabilità. La matematica dell'incerto; L'algebra di Boole, la logica formale e i fondamenti della matematica

1. La matematica nel XIX secolo

Lo sviluppo della matematica nel XIX sec. è avvenuto con rapidità crescente, in maniera analoga a quello del resto della scienza. In questa evoluzione tumultuosa è possibile, tuttavia, individuare il crescere e l'evolversi di alcuni filoni di ricerca e di pensiero, e la nascita di nuovi rami sul vecchio tronco di una scienza secolare; fenomeni tutti che hanno portato la matematica all'assetto che ha nel secolo presente, o meglio all'assetto che aveva verso l'inizio dello sviluppo dei mezzi di calcolo elettronici. Questi, con il loro apparire e con la loro diffusione, hanno rivoluzionato il panorama di una scienza che appare a prima vista come rigida e quasi cristallizzata, e che invece presenta spesso delle svolte che sorprendono il profano e che, per essere comprese, richiedono una buona preparazione ed una paziente analisi.

Per avere una prima idea dell'evoluzione subita dalla matematica nel XIX sec., pensiamo sia interessante far attenzione a ciò che di questa scienza viene detto nell'*Enciclopedia* di Diderot. Sappiamo che quest'opera ha segnato una svolta nella cultura occidentale, e possiamo pertanto riferirci ad essa per avere un'idea di una situazione storica, ed anche per scoprire i segni dell'inizio di quel contatto strettissimo tra scienza e tecnica che caratterizza l'atteggiamento del nostro tempo.

È stato spesso rilevato che l'*Enciclopedia* dedica molto spazio alla descrizione delle arti e dei mestieri, e - per quanto riguarda la matematica - dà molta importanza ad un ramo particolare di questa scienza: la meccanica razionale. Ciò non dipende soltanto dal prestigio che questa scienza aveva acquistato per opera di Newton e con gli straordinari sviluppi di Maupertuis, d'Alembert e Bernoulli, che preludevano alle grandi teorizza-



La Mécanique analytique di J. L. Lagrange. Il testo paradigmatico della meccanica teorica.

zioni di Lagrange, di Laplace e della fisica matematica del XIX sec. La scelta del posto preminente dato alla meccanica razionale manifestava l'intenzione di privilegiare una scienza che doveva permettere di dominare la materia e le forze che la muovono, e quindi era il fondamento del dominio dell'uomo sulla natura e sulle sue leggi. Per parte nostra pensiamo che in questo atteggiamento stia anche il nuovo modo di porsi della scienza pura di fronte alla tecnica, modo che è tipico della civilizzazione in cui viviamo: la tecnica, da risultato di ingegnosità singola, diventava risultato di applicazione metodica delle conoscenze astratte e scientifiche. In questo modo il confine tra scienza pura e scienza applicata, che si pensava ben determinato e definito nella concezione classica della scienza, diventa sempre più evanescente e labile.

A questo punto è interessante osservare che, alla vigilia di un secolo che doveva portare a sviluppi rivoluzionari, e non soltanto in campo politico, la matematica viene ancora concepita dal d'Alembert, che pure è uno dei promotori dell'*Enciclopedia*, in un modo che si potrebbe dire classico: essa è cioè considerata come una scienza definita dal suo oggetto generico (scienza della quantità) e le sue branche vengono specificate da quelle che si consideravano come le determinazioni specifiche della quantità: quantità discreta (numero), quantità continua (estensione).

Su queste due branche fondamentali erano poi ulteriormente impiantate divisioni e suddivisioni; ma queste erano sempre qualificate dai loro argomenti e dai loro oggetti. Questa concezione della matematica come scienza definita e qualificata dai suoi oggetti, venne radicalmente messa in crisi dall'evoluzione del XIX sec. L'origine ed il fondamento di questa crisi, a nostro parere, è da far risalire alla nascita di nuove branche della scienza matematica, ma soprattutto alla raggiunta dimostrazione della non contraddittorietà delle geometrie non-euclidee che, quindi, hanno pieno diritto di cittadinanza accanto alla geometria classica euclidea.

Questa conquista fece tramontare in modo definitivo l'idea di una scienza geometrica i cui fondamenti si presentano come poggiati su evidenze di fatto, su osservazioni elementari ed inconfutabili; di conseguenza doveva cambiare anche la concezione secondo la quale la chiarezza e la sicurezza delle deduzioni veniva qualificata, quasi per esemplarità, come ottenuta «more geometrico».

Nella breve analisi dell'evoluzione storica della matematica durante il XIX sec. seguiremo le suddivisioni classiche, ma soltanto per avere un punto di riferimento e una guida per l'esposizione; tuttavia terremo presente che tali riferimenti sono strettamente relativi e superficiali, e comunque legati all'epoca

storica nella quale sono nati e che, in qualche modo, li giustifica.

Di fatto, i vari capitoli che esporremo sono da considerarsi come fondati su distinzioni astratte piuttosto che su concrete separazioni; e ciò tanto dal punto di vista del fatto (perché molti matematici si sono occupati di questioni varie, e a cavallo tra i vari filoni) che dal punto di vista della teoria. Appare innegabile, per esempio, che la concezione del *continuo* geometrico e materiale abbia influenzato la nascita e la crescita dell'analisi matematica, almeno nei primi tempi; e che, ancora, i problemi posti dalla formalizzazione del continuo abbiano influenzato lo sviluppo dell'analisi logica, e quindi anche quel movimento di ricerca del rigore nell'analisi matematica, che è uno dei punti caratteristici della matematica del XIX sec.

In questo ordine di idee, e tenendo presenti queste precauzioni metodologiche, pensiamo di poter presentare l'evoluzione della matematica nel XIX sec. esponendo le vicende della geometria, del calcolo infinitesimale e della meccanica razionale. Questi argomenti all'epoca erano considerati come i pilastri portanti della scienza matematica, ed una traccia di questa concezione è rimasta nei programmi dei bienni universitari di laurea in matematica e in fisica fino a pochi decenni fa. Accanto a questi tronchi principali, cercheremo di presentare anche la nascita e la crescita di nuove branche della matematica, e soprattutto di quelle che in un certo modo caratterizzano la fisionomia e gli sviluppi che questa scienza ha avuto nel nostro secolo.

2. La geometria nel XIX secolo

a) Introduzione

L'evoluzione della geometria è esemplare per dare prova del cambiamento e del pro-

gresso che la matematica ha compiuto nel XIX sec. Pertanto presenteremo per prima l'evoluzione di questa branca della matematica, non per dare ad essa un posto privilegiato, ma per cogliere l'occasione di confermare con esempi e riferimenti concreti il nostro discorso.

Qui e nel seguito, i vari paragrafi e sottocapitoli nei quali suddivideremo la nostra esposizione non intendono presentare una stretta successione cronologica o una reale separazione degli argomenti. Lo sviluppo concreto di questi è stato, di fatto, molto più intricato di quanto non appaia in una presentazione forzatamente sommaria: pertanto la scelta degli argomenti appare in certa misura convenzionale, anche se dettata da ragioni abbastanza valide, fondate sulla natura del procedimento espositivo.

b) *L'ampliamento dello spazio e la geometria proiettiva*

Un primo interessante sintomo di evoluzione del pensiero geometrico può essere identificato nella introduzione di nuovi oggetti, e nella invenzione di nuove tecniche di espressione e di scoperta. Ciò avviene con l'invenzione della geometria proiettiva, invenzione che viene abitualmente attribuita a JEAN VICTOR PONCELET (1788-1867) e a KARL GEORG CHRISTIAN VON STAUDT (1798-1867); va detto, tuttavia, che le origini della geometria proiettiva possono essere cercate anche nei lavori di Desargues, che aveva già introdotto, con un linguaggio originale, certi enti che troveranno cittadinanza, circa due secoli dopo, nella nuova dottrina, ed aveva dimostrato certi teoremi che risulteranno fondamentali per essa. Altre radici, ancora più remote, possono essere ricercate nei metodi della prospettiva dovuti alla pittura del XV sec.; metodi che portarono, nel XIX sec., alla fioritura della geometria descrittiva, cioè allo sviluppo di quell'insieme di convenzio-

ni che servono a rappresentare sul piano gli enti geometrici dello spazio.

È stato osservato che la nascita e lo sviluppo dei metodi della geometria descrittiva (e della geometria proiettiva che li fonda) costituisce una specie di rivincita delle concezioni puramente geometriche sui metodi della geometria analitica, che avevano avuto una certa prevalenza, dovuta ai successi ed alla genialità di questa dottrina.

Si osserva facilmente che, quando si vogliono rappresentare sul piano gli enti dello spazio, occorre istituire un insieme opportuno di convenzioni; infatti, il piano ha una dimensione in meno dello spazio e, pertanto, le convenzioni di cui diciamo hanno lo scopo di fornire le informazioni in più, che non possono essere date dalla sola rappresentazione grafica.

D'altra parte, i vantaggi della rappresentazione grafica, soprattutto per la scienza applicata e per la tecnica, non possono essere negati; non è ragionevole pensare di poter rinunciare a questi vantaggi per adottare in ogni caso una rappresentazione completamente convenzionale, quale potrebbe essere data, per esempio, con la geometria analitica. Pensiamo di non essere lontani dal vero dicendo che pochi sarebbero disposti a rinunciare completamente alla carta topografica in favore di un elenco di coordinate cartesiane e di quote di località; elenco che, tuttavia, se spinto ad estrema precisione, potrebbe da un certo punto di vista essere più preciso e soddisfacente della rappresentazione grafica stessa.

Pertanto, l'invenzione della geometria descrittiva, che si vuole attribuire al Monge, si presenta come un qualcosa che è richiesto dagli sviluppi stessi della scienza e della tecnica del tempo.

Appare chiaro che le leggi della prospettiva costituiscono soltanto un inizio delle ricerche in questa direzione; infatti, i proble-

mi fondamentali non sono soltanto quelli di dare l'impressione della profondità con un disegno a due dimensioni, ma soprattutto quelli di ricercare i rapporti geometrici tra l'oggetto spaziale e la sua rappresentazione, e di determinare quali siano le informazioni che possono essere tratte da questa, in modo da poter conoscere le proprietà geometriche dell'oggetto rappresentato e da poter operare su questo.

Ci si avvia così verso lo studio di una tecnica di trasformazione delle figure geometriche - la proiezione - e verso la ricerca degli invarianti delle figure di fronte alle operazioni di questa nuova tecnica.

Nasce, in questo modo, una prima distinzione tra proprietà metriche e proprietà grafiche delle figure geometriche.

Con una sommaria analisi psicologica, si potrebbe dire che le proprietà del primo tipo, cioè le proprietà metriche, nascono da sensazioni di tipo tattilo-muscolare e di proiezione; esse vengono espresse facendo appello ad operazioni di trasporto rigido dei corpi (immaginati come rappresentanti delle figure geometriche), di misure di lunghezze e di angoli. Le proprietà del secondo tipo, cioè le proprietà grafiche, nascono da sensazioni prevalentemente visive, che riguardano l'appartenenza di un ente geometrico ad un altro: allineamento di punti (cioè appartenenza di almeno tre punti ad una medesima retta), passaggio di rette per punti, e così via.

La geometria euclidea classica non fa distinzione tra le proprietà dei vari tipi; la geometria proiettiva, invece, prende in considerazione prevalentemente le proprietà del secondo tipo (grafiche); e ciò è immediatamente comprensibile quando si pensi che l'operazione fondamentale che viene considerata dalla geometria proiettiva, la proiezione, mantiene immutate le proprietà grafiche, mentre altera, almeno in generale, le proprietà metriche.

Appare anche abbastanza evidente a prima vista che, per trattare tutte queste proprietà in modo unitario, per rendere eleganti e generali gli enunciati, per evitare di essere costretti ad ogni passo a fare distinzioni e precisazioni, occorre ampliare l'insieme degli enti su cui si opera; infatti, l'operazione di proiezione può trasformare delle rette che convergono in un punto in rette tutte tra loro parallele, può trasformare dei segmenti finiti in segmenti di lunghezza infinita. È chiaro che questa operazione non rispetta gli invarianti elementari (lunghezze di segmenti, angoli di coppie di rette) sui quali aveva sempre operato la geometria classica; e inoltre è pure chiaro che si impone la precisazione dell'esistenza di nuovi enti che si traducano in relazioni e proprietà più generali delle precedenti. Nasce, quindi, l'opportunità di introdurre gli elementi impropri (o elementi «all'infinito») e di costruire nuove funzioni numeriche degli enti della geometria (per esempio, quello che viene chiamato birapporto di quattro punti appartenenti ad una retta o birapporto di quattro rette appartenenti ad uno stesso fascio).

Come abbiamo detto, già Desargues, circa due secoli prima, aveva introdotto i fasci di rette tutte parallele tra loro, ed i fasci di piani tutti paralleli tra loro; questa introduzione viene fatta metodicamente nella nuova dottrina, definendo il punto improprio, che appartiene ad ogni retta di un fascio di rette parallele, e la retta impropria, che appartiene ad ogni piano che sia parallelo ad un piano dato.

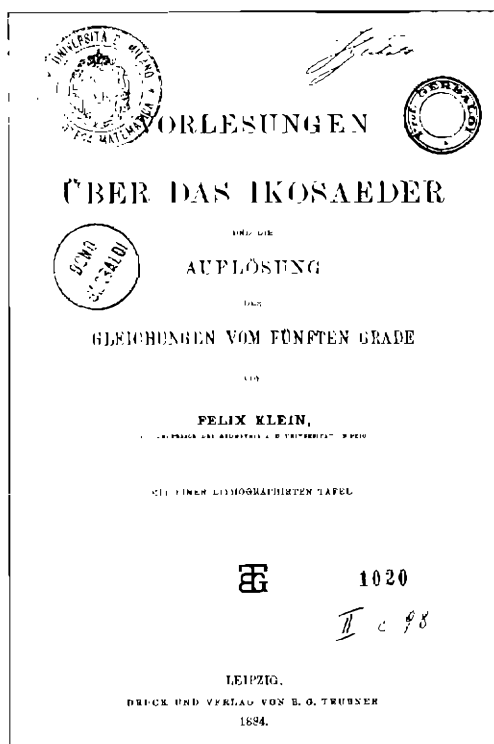
In questo modo, lo spazio viene ampliato convenzionalmente, con l'aggiunta di nuovi elementi che sono i punti impropri, i quali si organizzano in rette e, nello spazio tutto intero, formano un piano, il piano improprio dello spazio.

L'introduzione di questi elementi viene giustificata in vari modi, ma soprattutto con

la generalità e la semplicità degli enunciati e con l'esistenza di trasformazioni ammesse, le quali portano elementi propri in elementi impropri e viceversa. Così, per esempio, l'enunciato della geometria elementare per il quale, dato un punto P , una retta per esso è univocamente determinata dalla condizione di passare per un altro punto Q (distinto dal primo), oppure di essere parallela ad un'altra retta (non passante per P), si riduce all'enunciato che afferma che due punti distinti (non necessariamente propri entrambi) determinano univocamente una retta che li contiene; analogamente, l'enunciato che afferma che due rette complanari hanno un solo punto in comune oppure sono tra loro parallele viene compreso ed unificato nell'enunciato che afferma avere due rette complanari sempre un punto in comune (proprio o improprio): il caso eccezionale diventa, quindi, un caso particolare di un enunciato che comprende tutti i casi possibili.

È da osservare che l'affermarsi delle idee e dei metodi della geometria proiettiva ha lentamente diretto l'attenzione dei geometri verso oggetti diversi da quelli classici; si potrebbe dire che nella visione classica l'oggetto principale di studio era dato dalle figure geometriche considerate in se stesse. Gradatamente, l'oggetto principale di studio diventa la corrispondenza tra le figure opportunamente definite. Si arriva, quindi, a definire la corrispondenza proiettiva tra forme geometriche fondamentali, e a determinare le condizioni necessarie e sufficienti che determinano univocamente una corrispondenza proiettiva tra rette. È questo il teorema che viene chiamato «teorema fondamentale della proiettività», sulla base del quale sono fondati i teoremi che riguardano le corrispondenze tra spazi proiettivi di due e tre dimensioni.

Si apre così la strada per l'impostazione che Klein darà alla geometria, attraverso le



La celebre monografia di F. Klein sull'icosaedro, che, raccogliendo l'eredità di Ruffini, Abel e Galois, chiari in modo definitivo il problema della soluzione algebrica dell'equazione di quinto grado.

sue ricerche e le sue idee.

Vorremmo ricordare, infine, che la geometria proiettiva permette di presentare in modo straordinariamente elegante ed unitario la teoria di quelle curve conosciute fin dall'antichità classica, che erano state studiate da Apollonio, e che vengono chiamate sezioni coniche o, brevemente, coniche.

Si pensi alle possibili definizioni di queste curve: nell'antichità esse venivano definite come sezioni del cono rotondo mediante un piano, donde il nome. Ma è anche facile convincersi che una curva cosiffatta si può considerare ottenuta per proiezione di una

circonferenza dal vertice del cono; si capisce bene, quindi, come i metodi della geometria proiettiva dimostrino particolare efficacia ed eleganza nello studio di queste figure.

c) La classificazione di Klein

Abbiamo detto che la costruzione della geometria proiettiva condusse ad un ampliamento dell'insieme di enti che sono oggetto dell'attenzione dei geometri; questa attenzione venne orientata, di fatto, sul concetto di trasformazione proiettiva. Si potrebbe dire che questo fatto segnò il concepimento di una rigogliosa messe di studi sulle trasformazioni geometriche; studi fioriti, poi, nel secolo scorso. Ad alcune di queste dedicheremo una particolare attenzione in vista della loro importanza; ma non possiamo non osservare che la fioritura di nuovi e rigogliosi rami sulla pianta della geometria doveva, presto o tardi, porre il problema della unificazione e della classificazione di questi nuovi prodotti e di queste nuove invenzioni.

A questo si giunse per opera di FELIX KLEIN (1849-1925), il quale, in una sua celebre dissertazione inaugurale tenuta ad Erlangen nel 1872, compì quest'opera di classificazione e di unificazione utilizzando concetti che venivano costruiti in altri campi della matematica contemporanea.

La trattazione di Klein viene abitualmente richiamata con l'espressione di «Programma di Erlangen» e si fonda sul concetto di «gruppo di trasformazioni». Sostanzialmente, si potrebbe dire che Klein classifica le geometrie basandosi sulle trasformazioni alle quali esse sottopongono le figure e rispetto alle quali esse considerano le figure come invarianti.

Per esempio, nella concezione di Klein, la geometria euclidea classica è caratterizzata dal fatto che studia le proprietà di una figura geometrica che rimangono invariate quando questa figura venga trasportata rigidamente

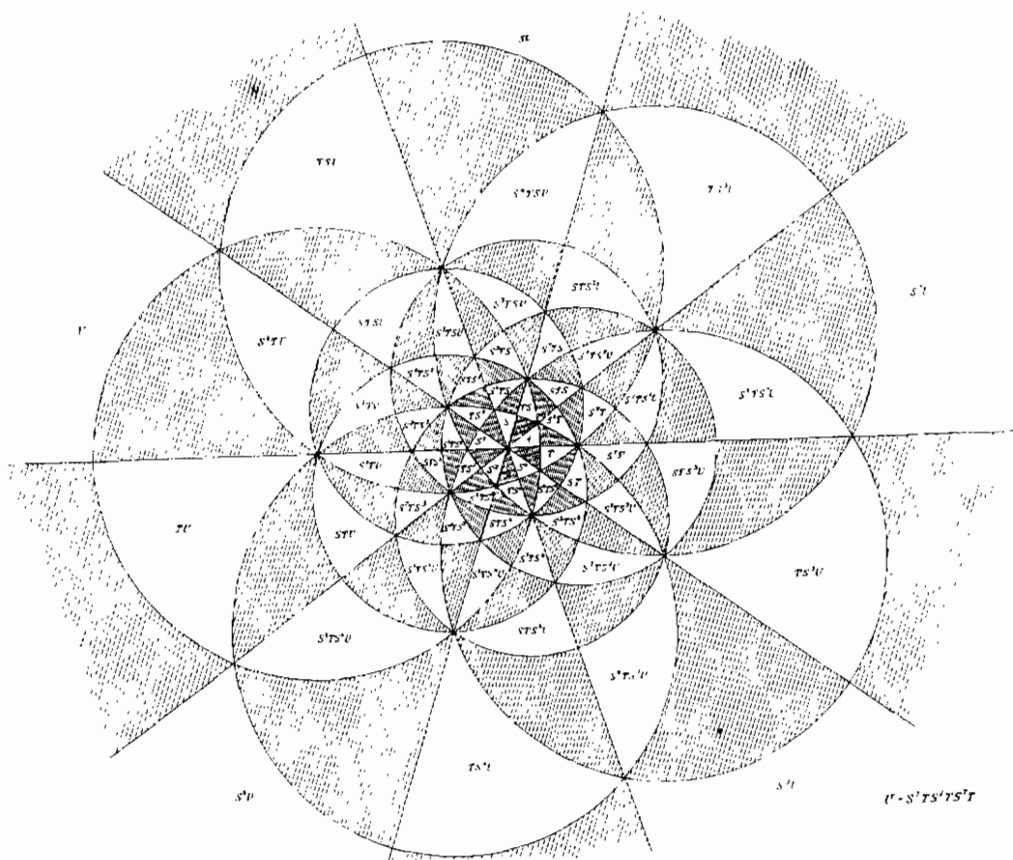


Tavola della monografia di Klein sull'icosaedro, che raffigura sul piano le partizioni della sfera indotte dal gruppo di movimenti dell'icosaedro in sé.

oppure trasformata mediante una similitudine.

La circostanza che appare più importante per la comprensione del significato di questa classificazione è il fatto che le similitudini formano un «gruppo». In altre parole, quando si studiano, ad esempio, le similitudini prese in se stesse, indipendentemente dal contenuto geometrico, si può osservare che è possibile definire un'operazione di composizione di due operazioni che viene chiamata «prodotto»; che questa operazione possiede una proprietà formale che viene detta «asso-

ciativa»; che si può prendere in considerazione una operazione, da chiamarsi «operazione identica», che lascia fermo ogni punto delle figure considerate; che, infine, si può prendere in considerazione, accanto ad ogni operazione, anche la «inversa» che, composta con la prima, dà l'operazione «identica».

Viene così associata al problema della classificazione delle geometrie una struttura algebrica diversa da quelle che erano state considerate fino a quel momento in relazione alle operazioni sui numeri reali oppure complessi. Tale struttura algebrica viene

chiamata, come si è detto, «gruppo», e costituirà un ente di grande interesse per l'algebra astratta della matematica successiva.

Assistiamo, in questo modo, all'entrata sulla scena della matematica di una struttura algebrica che presenta delle operazioni aventi proprietà che potrebbero essere giudicate «nuove» o «strane» rispetto a quelle delle operazioni di composizione delle operazioni dell'algebra dei numeri reali o complessi; infatti le operazioni di trasformazione delle figure non godono in generale della proprietà commutativa: il risultato di quello che viene chiamato «prodotto» di due operazioni dipende cioè, in modo essenziale, dall'ordine nel quale le operazioni stesse sono eseguite. Tale circostanza era già stata osservata da Eulero, che aveva studiato la composizione dei movimenti rigidi che mutano in sé un corpo tenendo fermo un suo punto.

d) *La geometria differenziale*

È verosimile pensare che l'invenzione della geometria analitica abbia dato luogo, tra gli altri suoi risultati, alla sistematica applicazione dei metodi dell'analisi matematica ai problemi della geometria.

Per esempio, si suol ripetere che una delle occasioni principali, uno degli stimoli fondamentali, alla introduzione del concetto di «derivata» di una funzione è costituito dal problema geometrico di definire e determinare la retta tangente ad una curva continua, nel senso abituale ed intuitivo del termine.

D'altra parte, un altro problema classico, quello della determinazione dell'area racchiusa fra rette e curve continue ha costituito pure uno stimolo ed un'occasione per l'introduzione del concetto di «integrale» di una funzione. In sintesi, si potrebbe dire che gli oggetti forniti dalla geometria sono quasi sempre stati in primo piano nell'offrire contenuti agli strumenti dell'analisi matematica

e nello stimolare le ricerche di questa branca della scienza.

Si è così giunti molto presto alla determinazione degli elementi geometrici interessanti collegati con i punti di una curva, rappresentata mediante i metodi della geometria descrittiva. Abbiamo già detto della retta tangente, ed occorre dire che anche la retta normale e la circonferenza osculatrice ad una curva in un suo punto sono state determinate abbastanza presto, nel corso dello sviluppo dell'analisi. Correlativamente sono stati determinati altri elementi geometrici (per esempio il centro di curvatura, la curva evoluta) che sono strettamente legati a queste prime determinazioni. L'analisi non si è arrestata alle curve rappresentate nel piano: si è giunti presto alla rappresentazione delle superfici nello spazio abituale tridimensionale, ed alla determinazione degli elementi geometrici collegati con i punti di queste: piano tangente, retta normale e così via. È classica l'analisi fatta da Eulero della legge che determina le curvature delle curve che si ottengono secando una superficie con i piani passanti per la retta normale.

Un progresso fondamentale nella geometria differenziale, cioè nella trattazione sistematica delle proprietà geometriche mediante gli strumenti dell'analisi, è dovuto a CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855).

Questo grande matematico introdusse metodicamente il concetto di coordinate curvilinee su una superficie, chiamate ancora oggi da qualcuno coordinate gaussiane; queste possono essere concepite come un sistema di convenzioni per associare due numeri (coordinate) ad un punto qualsivoglia di una regione abbastanza ristretta di una superficie, in modo del tutto indipendente da un eventuale significato che colleghi tali numeri a misure di segmenti o di angoli.

Gauss dimostrò che molte delle proprietà geometriche di una superficie possono essere

conosciute a partire da quella che viene chiamata la «metrica» di essa; questa è un'espressione quadratica del tipo

$$ds^2 = E du^2 + F du dv + G dv^2$$

e può essere interpretata come il quadrato della distanza di due punti infinitamente vicini della superficie, le cui coordinate gaussiane differiscono per le quantità infinitesime du e dv .

Ovviamente, nella espressione scritta, i coefficienti $E F G$ sono, in generale, delle funzioni delle due coordinate gaussiane di punto. A partire da queste funzioni e dalle loro derivate, Gauss costruì una funzione del punto che viene chiamata «curvatura gaussiana» o anche curvatura totale della superficie nel punto stesso, giungendo a dimostrare che questa funzione viene data anche come prodotto delle curvatures estremali (la minima e la massima) di quelle delle sezioni piane eseguite con piani passanti per la normale, di cui abbiamo detto.

Tale funzione risulta essere una proprietà dei punti della superficie, che non è soggetta a variazioni quando tale superficie venga, per così dire, realizzata materialmente con un velo sottilissimo, perfettamente flessibile ma inestendibile. Prendeva così avvio lo studio delle proprietà che vengono chiamate «intrinseche» di una superficie o anche di una varietà a più di due dimensioni, proprietà che sono indipendenti (in certa misura) dall'atteggiamento che la superficie assume nello spazio, o che una varietà assume in uno spazio pluridimensionale nel quale essa viene pensata immersa.

Queste considerazioni possono essere pensate come il punto di partenza da cui prese origine la concezione di BERNHARD RIEMANN (1826-1866), che fondò in modo del tutto originale il concetto di geometria su una varietà ad n dimensioni, facendo uscire il pen-

siero matematico da una strettoia in cui era rinchiuso dalla problematica riguardante il postulato di Euclide e le questioni ad esso connesse.

D'altra parte, la fecondità di queste concezioni non si è arrestata alla geometria, ma ha avuto una grandissima influenza anche nella fisica, ed in particolare è stata trasferita nelle idee e nei metodi che stanno alla base della teoria della relatività generale di Einstein. Idee e metodi che hanno portato alla geometrizzazione della fisica secondo una evoluzione abbastanza lunga, della quale daremo qui qualche breve cenno.

A tal fine vorremo anzitutto ricollegarci alla osservazione che abbiamo fatto poco fa, dicendo che, nella concezione gaussiana, e poi nella visione di Riemann, l'attribuzione della coppia di coordinate ad un punto di una superficie, o in generale di un gruppo di n coordinate ad un punto di una varietà ad n dimensioni, non ha più quello stretto significato geometrico che aveva all'inizio del metodo delle coordinate; in altre parole, questi numeri sono in certa misura arbitrari, e non hanno più, almeno in linea di principio, i significati di lunghezze di segmenti o di misure di angoli, come avveniva nella concezione classica del metodo della geometria analitica.

Si pone, quindi, in modo quasi naturale, il problema della ricerca delle proprietà che potrebbero essere chiamate «vere» oppure «obiettive», degli enti geometrici, rappresentati in un modo che appare così poco «naturale». D'altra parte si pone pure il problema di determinare che cosa avviene quando si cambiano le convenzioni di rappresentazione, cioè quando si passa da un sistema di coordinate puramente convenzionali ad un altro che abbia le stesse caratteristiche.

Nell'impostazione di Klein le trasformazioni di coordinate costituiscono un gruppo, e le proprietà che interessano la geometria

sono gli invarianti rispetto a questo gruppo di trasformazioni. Negli sviluppi piú maturi della geometria differenziale vennero studiati in modo particolare degli algoritmi che permettessero di ricavare metodicamente le leggi di trasformazione degli enti della geometria e permettessero di determinare, in modo pure metodico e con procedimenti ben definiti, le proprietà invarianti rispetto a determinati gruppi di trasformazioni.

Appare chiaro il legame tra queste concezioni geometriche e le idee che Einstein doveva porre alla base del suo concetto di relatività. Infatti nella concezione riemanniana le coordinate di un punto non hanno piú un immediato significato «geometrico»; ciò che interessa è la determinazione degli invarianti costruiti con le coordinate, che sono indipendenti da ogni possibile cambiamento di queste.

In modo analogo, la concezione einsteiniana della fisica non assegna piú dei significati assoluti, cioè validi per ogni osservatore, ad ogni misura di lunghezza e di tempo, e correlativamente la obiettività delle leggi della fisica va ricercata negli invarianti di fronte al gruppo di trasformazioni di coordinate spazio-temporali che esprimono le leggi di passaggio dalle osservazioni di un osservatore a quelle di un altro.

In questo travaso di concetti ed anche di metodi di calcolo e di algoritmi concreti sta quella che si potrebbe chiamare la geometrizzazione della fisica; non ovviamente nel senso che si operi una confusione tra le due dottrine o uno svuotamento di significato fisico delle osservazioni della natura, ma nel senso che la mentalità che il geometra aveva sviluppato per la ricerca di proprietà obiettive viene trasferita, insieme con una buona dose di metodi di calcolo, per la soluzione di problemi analoghi della fisica.

e) *La geometria algebrica*

Presentando le cose in modo abbastanza sommario, si potrebbe dire che l'invenzione della geometria analitica ha consentito al matematico di trasformare le relazioni ed i problemi della geometria in relazioni espresse mediante strumenti dell'algebra e dell'analisi matematica ed in problemi risolti con i metodi di queste due dottrine. In particolare, si può osservare che i primi problemi formulati e risolti con i metodi della geometria analitica sono stati quelli che si ricollegano alla geometria euclidea classica; tali problemi, nella loro maggioranza, si traducono in relazioni algebriche, in misure di segmenti, in determinazioni di funzioni goniometriche, e così via.

Si costruiva molto presto una teoria elementare delle curve algebriche, cioè dei luoghi di punti definiti attraverso la condizione che le loro coordinate soddisfino ad una equazione algebrica. I problemi che sfuggivano a questa considerazione erano sostanzialmente quelli riguardanti la rettificazione della circonferenza e la quadratura del cerchio, problemi che ebbero una risposta definitiva soltanto facendo ricorso alla teoria delle funzioni analitiche. Ma quasi tutte le curve che interessavano i geometri dell'antichità, e in particolare le coniche, rientrano nella classe delle curve algebriche; anzi, le coniche sono caratterizzate dalla condizione di essere rappresentate da equazioni di secondo grado nelle coordinate cartesiane e anche in altri sistemi di coordinate che, a loro volta, possono essere considerate come delle generalizzazioni delle coordinate cartesiane (coordinate proiettive nel piano).

Si pose presto anche il problema di rappresentare in modo adeguato anche l'insieme delle rette tangenti a curve siffatte; il problema era diventato particolarmente interessante dopo l'introduzione delle coordi-

nate di retta dovuta a JULIUS PLÜCKER (1801-1868).

Questa introduzione costituiva il corrispettivo analitico della trattazione che lo Staudt aveva dato della geometria proiettiva, enunciando in modo perfettamente simmetrico ogni sua proposizione per le rette e per i punti. Si faceva così progressivamente strada il concetto di «dualità» nel piano, cioè di una corrispondenza biunivoca tra le proprietà di figure date e quelle di altre, ottenute da queste scambiando i punti con le rette.

L'aspetto logico di questa corrispondenza era rilevato da JOSEPH DIEZ GERGONNE (1771-1859), il quale puntava l'attenzione soprattutto sull'operazione formale linguistica che consiste nello scambio delle parole negli enunciati delle proposizioni primitive ed in quelli dei teoremi, in modo che quanto pareva frutto di una mera curiosità dal punto di vista della geometria diventava il risultato di una legge formale rigorosa della logica.

Tale operazione era tuttavia possibile nell'ambiente che era stato costruito dalla geometria proiettiva, cioè nello spazio ampliato con gli elementi impropri, ed era una ulteriore conferma della generalità e della potenza dei nuovi metodi di tale geometria.

Si giungeva, quindi, alla nozione di involuppo aderente ad una curva algebrica, ed alla constatazione del fatto che anche l'insieme delle rette tangenti ad una curva cosiffatta è determinato da una equazione algebrica che lega le coordinate plückeriane delle rette.

Va detto che queste ricerche non si presentavano come del tutto nuove, ed anzi erano nella linea di sviluppo della matematica che era stata iniziata da Newton, il quale aveva già classificato le curve piane rappresentate da una equazione di terzo grado che lega le coordinate cartesiane dei singoli punti.

Tutto ciò dava luogo ad un primo gruppo di studi geometrici, strettamente legati al-

la ricerca di proprietà delle curve algebriche piane e degli involuppi aderenti di rette, che fossero invarianti di fronte al gruppo delle trasformazioni proiettive. Venivano individuate certe teorie iniziali delle singolarità delle curve, considerate come luoghi di punti e come involuppi di tangenti. Tali singolarità sono quelle che vengono chiamate «elementari»: punti doppi (a tangenti distinte), cuspidi, tangenti di flesso, tangenti doppie. Venivano pure determinate le prime relazioni tra i numeri delle singolarità di questo tipo.

Tuttavia venne presto alla luce la circostanza che il linguaggio dell'algebra, utilizzato per la ricerca delle proprietà geometriche, non si adattava pienamente alla concezione ancora dominante nella geometria. Infatti, in origine, le convenzioni della geometria analitica portano a rappresentare i punti di un piano o dello spazio mediante coordinate reali, secondo la concezione classica della geometria.

Le equazioni che ne conseguono sono valide per definizione nel campo complesso. In questo campo hanno significato i teoremi che riguardano il numero delle soluzioni di un'equazione, e le conseguenti proprietà che riguardano la molteplicità delle radici e, di conseguenza, la nozione di tangenza e le altre che si ricollegano a questa.

In altre parole, l'osservazione che i due campi, quello della geometria e quello dell'algebra, non si sovrappongono esattamente l'uno sull'altro, è di evidenza abbastanza immediata e dà luogo ad una serie di problemi, la cui risposta può essere cercata camminando, per così dire, in due direzioni opposte. In una prima direzione si dà la prevalenza alla intuizione geometrica, considerando l'algebra come uno strumento che deve adattarsi alla intuizione del reale, quale se la pone la geometria nel senso classico; ed in questo caso si è costretti ad una continua opera di

controllo del significato geometrico degli enti dell'algebra.

Nella seconda direzione, si segue il criterio della massima generalità e della unità di linguaggio, abbandonando di conseguenza la ricerca della rispondenza perfetta del linguaggio algebrico con una pretesa intuizione geometrica. Si introducono, quindi, convenzionalmente degli enti che costituiscono la generalizzazione degli enti della geometria, che portano ancora gli stessi nomi di questi, ma che hanno il loro significato ed il loro fondamento soltanto nelle strutture algebriche e, in generale, analitiche che ne costituiscono la definizione.

Ovviamente la scelta della strada da seguire non è imposta da ragioni strettamente logiche, ma è dovuta piuttosto ai gusti ed alle possibilità di generalizzazione che sono offerti dall'una o dall'altra delle due strade.

Di fatto la seconda strada è stata adottata, e questa scelta è giustificata a posteriori dalla fecondità e dalla generalità dei risultati raggiunti e dalla potenza delle teorie costruite. Si è giunti, così, al concetto di curva algebrica piana come insieme di coppie di numeri complessi (chiamate convenzionalmente «punti») che soddisfano ad una equazione algebrica, ottenuta uguagliando a zero un polinomio nelle due variabili x ed y (alle quali si permette di variare anche nel campo dei numeri complessi) ed i cui coefficienti sono dei numeri complessi qualunque. Ovviamente, i punti del luogo non corrispondono più, almeno in generale, ai punti di un piano quale è concepito dalla geometria elementare e dalla geometria analitica classica; ma le proprietà di questi insiemi di coppie di numeri complessi sono ancora oggi enunciate in linguaggio geometrico, il quale è giustificato da ragioni di tradizione e di comodità.

Appare chiaro che, una volta preso questo atteggiamento, le possibilità di ulteriori generalizzazioni sono molto numerose; noi

ci limiteremo a ricordarne alcune, che appaiono abbastanza significative per le discussioni che spesso originarono e per la fecondità delle conseguenze che se ne possono trarre.

Una prima generalizzazione si può conseguire con l'ampliamento del concetto di piano proiettivo, di cui abbiamo detto, giungendo al concetto del piano proiettivo complesso. Questo ente viene considerato rispetto alle sue proprietà proiettive, cioè rispetto alla sue proprietà che non variano in rapporto al gruppo delle trasformazioni lineari invertibili delle variabili, che convenzionalmente vengono ancora chiamate «coordinate proiettive» (complesse) di punto. Si ottengono così le proprietà che vengono chiamate «proiettive» o anche «plückeriane» delle curve algebriche piane, le quali risultano invarianti rispetto alle trasformazioni del gruppo lineare.

Una seconda generalizzazione, cui si giunge abbandonando il sostegno di una pretesa «intuizione» geometrica, è quella che conduce alla creazione del concetto di iperspazio (reale o complesso) ad n dimensioni, con n maggiore di 3.

È interessante ricordare che sulla introduzione di enti siffatti, che sono puramente convenzionali e che vengono designati con linguaggio geometrico soltanto per comodità e per ragioni tradizionali (che pure hanno il loro peso ed il loro valore), si ebbero opinioni divergenti ed anche delle polemiche; infatti, qualche corrente di pensiero (per es. quella che faceva capo al geometra italiano GIUSEPPE VERONESE, 1854-1917) avrebbe voluto costruire questi enti su un sistema di assiomi che avrebbe dovuto essere in continuità con gli assiomi validi nel nostro spazio fisico a tre dimensioni.

Tuttavia questa posizione si rivelò presto difficilmente sostenibile, e si giunse quindi all'assetto attuale nel quale, ripetiamo, si ac-

cetta il linguaggio geometrico come puramente convenzionale e si accetta la definizione di «punto» in uno spazio ad n dimensioni come un insieme coordinato di n numeri, che vengono ancora convenzionalmente chiamati «coordinate» del punto stesso. Si costruisce così una «geometria» dello spazio ad n dimensioni, le cui proposizioni tuttavia non sono che delle trasposizioni (in linguaggio comodo ed intuitivo) di teoremi delle dottrine abituali della matematica: algebra ed analisi matematica.

Tralasciamo qui di soffermarci su ulteriori generalizzazioni di questi concetti, per dirigere la nostra attenzione sul fatto che alla geometria algebrica, che stiamo esponendo, si è giunti anche per un altro cammino, il quale procedeva sostanzialmente a partire dal problema della determinazione della funzione primitiva (integrale indefinito) di una funzione data. In partenza il problema venne limitato alla ricerca della funzione primitiva di una funzione reale di variabile reale; da questo punto di vista si giunse presto alla coscienza del fatto che funzioni che possono essere considerate elementari, come le funzioni razionali, possono dar luogo a funzioni che potrebbero essere giudicate meno «semplici», come logaritmi o funzioni trigonometriche inverse.

Ulteriori difficoltà si presentano quando si vogliono ricercare le funzioni primitive (integrali indefiniti) di funzioni date da espressioni irrazionali anche relativamente «semplici». Ci si accorse che per la definizione delle primitive di molte funzioni di questo tipo non bastavano le funzioni già conosciute a quel tempo; il caso più semplice fu presentato da quelli che vengono chiamati ancora oggi «integrali ellittici»: integrali di polinomi di quarto o di terzo grado, a radici distinte, posti sotto radice quadrata. Le primitive di queste funzioni formano una classe di funzioni che vengono chiamate «ellitti-

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \dots \sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a} = \frac{\sqrt[n]{a}}{(\sqrt[n]{a})^{n-1}}$$

$$\sqrt[n]{a} = f(a^k), \quad \sqrt[n]{a} = \varphi(a^k)$$

$$f(a^k) = (\varphi(a^k))^k \cdot (\varphi(a^k))^{n-k}$$

$$f(a^k) = (\varphi(a^k))^k \cdot (\varphi(a^k))^{n-k}$$

$$f(a^k) = (\varphi(a^k))^{k \cdot (\varphi(a^k))^{n-k}}$$

$$f(a^k) = \{ \varphi(a^k) \}^k \cdot \{ \varphi(a^k) \}^{n-k} \cdot \{ \varphi(a^k) \}^{k \cdot n}$$

$$a^k = a^2, \quad a^{k-1} = 1, \quad k-1 = n \cdot m$$

$$(a^k)^{\frac{1}{n}} = (\varphi(a^k))^k \cdot (\varphi(a^k))^{n-k} \cdot (\varphi(a^k))^{k \cdot n} \cdot (\varphi(a^k))^{k \cdot (n-k)}$$

$$A_1^k A_2^k A_3^k A_4^k \dots A_n^k \cdot A_1^{n-k} A_2^{n-k} A_3^{n-k} \dots A_n^{n-k}$$

$$\frac{A_1^k A_2^k A_3^k A_4^k \dots A_n^k}{A_1^{n-k} A_2^{n-k} A_3^{n-k} A_4^{n-k} \dots A_n^{n-k}} \cdot \frac{A_1^k A_2^k A_3^k A_4^k \dots A_n^k}{A_1^{n-k} A_2^{n-k} A_3^{n-k} A_4^{n-k} \dots A_n^{n-k}}$$

$$4+6 \cdot (2+4)$$

Scritto autografo dai Quaderni di N. H. Abel.

che» e che furono studiate e tabulate nella prima metà del XIX sec. Gli studi di B. Riemann e di NIELS HENRIK ABEL (1802-1829) portarono ad inquadrare queste funzioni in una classe molto più vasta; anzitutto si è constatato che l'ambiente naturale di queste funzioni è quello delle funzioni complesse della variabile complessa; tali sono le funzioni algebriche, cioè quelle definite da una equazione algebrica che lega due variabili complesse, quando si consideri una delle variabili come indipendente e si consideri di conseguenza l'altra come definita implicitamente dall'equazione. In questo ordine di idee, il concetto di curva algebrica che abbiamo visto prima si ricollega in modo naturale a quello di funzione algebrica, ed anzi l'uno completa l'altro a seconda del punto di vista dal quale ci si pone. Riemann dimostrò che è possibile associare ad ogni funzione algebrica una superficie che viene chiamata ancora oggi superficie di Riemann della curva

(brevemente: «riemanniana»); essa permette di descrivere in modo convenzionale ma intuitivo le proprietà della funzione algebrica o della curva algebrica connessa; questa, infatti, è propriamente rappresentata da una varietà geometrica a due dimensioni reali, perché è luogo di coppie di numeri complessi, legati tra loro da una equazione algebrica, ed ognuno di questi è determinato da una coppia di numeri reali, come si vedrà.

Gli integrali (funzioni primitive) delle funzioni algebriche, vengono chiamati anche brevemente integrali di funzioni razionali su una superficie riemanniana, e costituiscono una classe di funzioni complesse della variabile complessa, dotate di nuove e notevoli proprietà rispetto alle antiche già conosciute.

Pertanto, con queste teorie si veniva a precisare la posizione della geometria algebrica, mettendo in evidenza che il suo supporto logico era fornito dalla teoria delle funzioni analitiche, e vanificando quindi il tentativo di purismo che qualche scuola geometrica aveva messo in opera per fondare queste teorie in modo puramente assiomatico e geometrico, indipendentemente dall'analisi matematica. In questo ordine di idee sono rimaste abbastanza celebri le polemiche tra PONCELET e AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789-1857): il primo, enunciando un «principio di continuità» cercava di estendere non soltanto i risultati ma anche i metodi della geometria classica, enunciando delle leggi di generalizzazione delle relazioni geometriche che sono pienamente giustificate e possono essere usate senza errori, fondandosi soltanto sulla teoria delle funzioni analitiche; il Cauchy, dal canto suo, rifiutava la validità logica probante di questi principi, lasciando loro soltanto il compito di un notevole stimolo alla generalizzazione e alla induzione.

Va detto che tentativi analoghi furono fatti da MICHEL CHASLES (1793-1880) con la enunciazione dei «porismi», e più tardi da

LUGI CREMONA (1830-1903), che tentò in qualche modo di rifondare la geometria algebrica facendo a meno della teoria esplicita delle funzioni di variabile complessa. Una minima traccia di tendenze di questo tipo è forse rimasta nelle varie scuole di geometria algebrica, in particolare in quella che viene chiamata «italiana», che coltivò per molto tempo un certo purismo metodologico, cercando di raggiungere il massimo numero di risultati senza ricorrere alla teoria degli integrali delle funzioni razionali su una riemanniana, o integrali abeliani. Di questa scuola vanno ricordati i successi nella teoria delle curve algebriche in un iperspazio qualunque, e nella teoria delle superfici algebriche. In particolare, il Cremona scoperse l'esistenza delle trasformazioni birazionali non lineari tra spazi proiettivi di dimensione maggiore di uno; trasformazioni che vengono ancora oggi chiamate «cremoniane». Questa scoperta introdusse un nuovo filone di ricerca nella geometria algebrica, che si qualificò in quel tempo come la ricerca delle proprietà che sono invarianti per trasformazioni cremoniane, le quali ammettono le proiettive come caso particolare. Tra queste proprietà invarianti è fondamentale il «genere» di una curva algebrica, il quale ha anche il significato di un invariante topologico della superficie di Riemann a questa collegata. La teoria venne ulteriormente generalizzata, e portata a grande astrattezza e generalità con gruppi più vasti di trasformazioni, e considerando la teoria delle funzioni complesse di più variabili complesse.

APERÇU HISTORIQUE

sur l'origine et le développement

DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE,

PAR COURTOISIER

DE CELLES QUI SE RAPPORTENT A LA GÉOMÉTRIE MODERNE.

PAR

D'UN MÉMORIE DE GÉOMÉTRIE SUR DEUX PRINCIPES GÉNÉRAUX DE LA SCIENCE

LA DUALITÉ ET L'HOMOGRAPHIE.

PAR M. CHASLES,

Membre de l'Institut, Membre de la Société royale de Londres, Membre honoraire de l'Académie royale d'Irlande, Associé étranger des Académies royales de Bologne et de Göttingue, de Naples, de Turin, de Vienne, de la Société royale des Sciences, Correspondant de l'Académie royale des Sciences de Saragossa, de l'Académie royale de Madrid, de l'Académie de Turin, de l'Académie des Sciences de l'Institut et de l'Institut de Belgique, de l'Institut Vénitien des Sciences, Lettres et Arts, de l'Institut Royal Lombard des Sciences et Lettres de Milan, Membre honoraire des Académies royales de Séville, de l'Institut des Arts et Métiers, de l'Institut National des Sciences et Lettres, Associé étranger de l'Académie nationale des Lincei d'Ancône, Membre honoraire étranger des Académies Américaine des Arts et Sciences de Boston.

SECONDE ÉDITION, CONFORME A LA PREMIÈRE



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

BOULEVARD DES FOSSES-SAINTE-JACQUES, 20, PRÈS L'ÉGLISE GYMNASTIQUE.

SUCCESSION DE MALLET-BACHELIER

Quai des Augustins, 55

1876

Tous droits réservés

L'Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie di M. Chasles. Una monumentale sintesi storica che segnò una ripresa dei metodi sintetici in geometria.

f) *I problemi del continuo geometrico*

L'invenzione della geometria analitica ha messo in contatto i due mondi, quello dei numeri e quello della geometria, che prima apparivano separati; e questa compenetrazione ha condotto a risultati fecondi entrambe le dottrine.

Una delle questioni piú interessanti che vennero a maturazione nel XIX sec., e che hanno le loro radici anche in tale compenetrazione di problematiche, è quella che riguarda il concetto di continuità, la sua precisazione, e la soluzione dei problemi logici ed algoritmici che vi si ricollegano.

La proprietà di continuità dello spazio geometrico o di quel qualsivoglia ente che si considerava come oggetto della geometria è stata sempre considerata come un fatto evidente; una conferma di questa proprietà è data dalla dimostrazione classica dell'esistenza di coppie di segmenti incommensurabili. Si potrebbe dire che questa dimostrazione, che, con la logica, supera di qualità ogni livello raggiungibile mediante l'esperienza fisica concreta, stabilisce una proprietà di «non granularità», di non «discretezza» dell'ente che si considera oggetto della geometria. In altre parole, la conseguenza immediata del teorema di Pitagora potrebbe essere enunciata dicendo che *non esiste* un atomo, o un elemento granulare, che costituisca lo spazio.

Questa concezione viene attribuita genericamente ad una non meglio specificata «intuizione geometrica» ed è, probabilmente, il risultato di una elaborazione fantastica, con la quale la nostra immaginazione rielabora i dati delle esperienze sensibili immediate, che non ci rivelano lacune, almeno a livello macroscopico, negli oggetti che osserviamo. Dal punto di vista psicologico qualche cosa di analogo si verifica quando si accetta in base ad una pretesa «evidenza» il fatto che uno specchio costituisca un modello abbastanza

adeguato del piano della geometria. È del tutto ovvio, tuttavia, che non si tratta di una evidenza logica, ma di una immagine dovuta semplicemente al fatto che il nostro occhio è sensibile soltanto ad una certa gamma di onde elettromagnetiche e che il nostro tatto è assai grossolano: se adottiamo altri strumenti di osservazione, ci accorgiamo del fatto che la superficie speculare, che ci appariva priva di lacune ad una osservazione superficiale, è effettivamente piú dotata di lacune che di materia. Ed in questo ordine di idee, si potrebbe anche aggiungere che l'atomismo classico era una dottrina filosofica e metafisica, che andava al di là della esperienza sensibile per giungere ad una spiegazione razionale delle proprietà della materia, indipendentemente dalle possibilità di osservazione che si avevano allora.

È abbastanza naturale quindi che, nei secoli, la continuità della materia o, se non altro, dell'oggetto della geometria venisse considerata come una proprietà del tutto evidente, che non aveva bisogno di precisazioni. La proprietà stessa veniva anche attribuita, per una sorta di osmosi concettuale, anche al tempo della meccanica classica; il che fondava l'applicazione dell'analisi matematica alla meccanica razionale ed alla fisica.

Le discussioni che avvennero in età rinascimentale sugli indivisibili e sui differenziali, sulle grandezze che venivano chiamate «evanescenti», sui limiti dei rapporti tra copie di grandezze di questo tipo, non chiarirono molto la natura del problema, introducendo piuttosto nelle dispute una dimensione filosofica che non aiutava certo la chiarezza matematica.

In particolare, l'analisi matematica introduceva ed impiegava metodicamente il concetto di funzione continua, che pure veniva considerato come evidente, con tutte le conseguenze.

Per esempio, il concetto di funzione con-

tinua veniva introdotto in modo prevalentemente qualitativo, dicendo che una funzione cosiffatta «non fa salti», ovvero che varia di poco quando la variabile indipendente varia di poco. Le proprietà di tale funzione venivano pure considerate come sostanzialmente evidenti, accettando che ogni funzione continua in un intervallo prendesse ivi un valore massimo, un valore minimo, e prendesse pure ogni valore compreso tra il massimo ed il minimo.

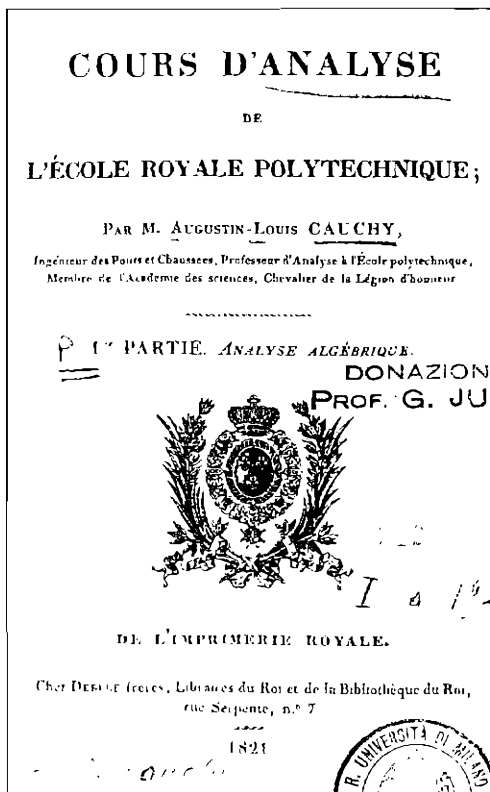
È lecito pensare che l'origine della pretesa «evidenza» di questi concetti riguardanti le funzioni continue e le loro proprietà sia dovuta alla elaborazione idealizzante di certe esperienze, ed alle abitudini concettuali dovute alla necessità di schematizzazione degli oggetti della meccanica razionale.

Invero questa dottrina aveva adottato da tempo il concetto geometrico di punto per rappresentare un oggetto materiale del quale interessa soltanto la posizione, che può essere ritenuto (ovviamente, in relazione ad un determinato contesto) privo di estensione. Correlativamente a questa schematizzazione del corpo piccolo con un punto si arriva alla schematizzazione della sua traiettoria con una linea geometrica; la stessa pratica quotidiana dell'osservazione dei corpi che si muovono senza far salti (almeno visibilmente) o addirittura del disegnare operativamente una linea con uno strumento scrivente, conduce a farsi un'idea che si considera «intuitiva» del concetto di linea continua.

Un'analisi critica rigorosa fece giustizia di queste concezioni e mise in evidenza la necessità di formulare in modo rigoroso ed ineccepibile il concetto di continuità; a questo si pervenne enunciando in modo esplicito dei postulati (in forme varie) che esprimono in modo preciso questa qualità per la retta e poi, con facili estensioni, per le altre figure geometriche.

Correlativamente, nel campo dell'analisi

matematica si giunse a mettere a punto gli strumenti analitici per risolvere quel problema indicato da alcuni come «aritmetizzazione del continuo». In sostanza, questi risultati furono ottenuti attraverso la precisazione del significato e della portata dei procedimenti infiniti, che la matematica dei secoli precedenti aveva spesso utilizzato senza dominarli completamente; ed a precisare in modo ineccepibile il concetto di limite e le proprietà che esso possiede. Queste precisazioni avvennero principalmente per opera di A. Cauchy, KARL WEIERSTRASS (1815-1897) e



Il Cours d'Analyse di A.-L. Cauchy. Un testo fondamentale per il progresso dell'analisi matematica.

GEORG CANTOR (1845-1918); il risultato che si ottenne fu la costruzione rigorosa del campo dei numeri reali, dei quali può dirsi che costituiscono il corrispettivo analitico del concetto geometrico di continuo, senza lacune di sorta.

Fu anche precisato il concetto di funzione continua (di una o di più variabili) e vennero chiariti la portata ed il significato degli strumenti costruiti dall'analisi matematica per descrivere la realtà geometrica o i contenuti della meccanica o della fisica matematica. Ricordiamo, in particolare, come il concetto di «curva», quale ci è fornito dalle esperienze elementari di cui si è detto sopra, fosse riprodotto abbastanza bene dal concetto rigoroso di funzione continua dell'analisi matematica. Questa congettura fu smentita da un risultato ottenuto da GIUSEPPE PEANO (1858-1932) con la sua celebre curva continua che riempie tutto un quadrato; egli dimostrò che occorre utilizzare delle notevoli precauzioni per rendere in modo preciso e inequivocabile gli enti dell'intuizione mediante gli strumenti precisi dell'analisi matematica.

g) *I problemi logici dei fondamenti della geometria*

L'evoluzione delle idee di cui abbiamo detto brevemente condusse la matematica a porsi i problemi dei fondamenti della geometria e addirittura del significato di questa dottrina. A ciò si venne condotti, come si è detto, dalla conferma della compatibilità logica della geometria non-euclidea, conferma che chiudeva una controversia durata secoli e costringeva di conseguenza i matematici a guardare alla geometria in particolare, e alla matematica in generale, con atteggiamento diverso da quello che vigeva nei secoli precedenti.

Come è noto, Euclide fondava la sua geo-

metria su certe proposizioni non dimostrate, tra le quali ve ne sono alcune che egli denomina «nozioni comuni» ed altre cinque che egli denomina «postulati». Non ci soffermiamo sui primi quattro di tali postulati, che non hanno dato luogo a critiche e a discussioni, almeno nella concezione classica della geometria; il quinto enuncia sostanzialmente la unicità della parallela ad una retta data, per un punto fuori di questa.

L'atteggiamento dei matematici di tutti i tempi nei riguardi di questo postulato è sempre stato ambiguo e in certo modo paradossale: lo si considerava come evidente, ma nonostante questo (o, come vuole qualcuno, proprio per questo) si cercava di dimostrarlo. Probabilmente l'atteggiamento è dovuto al fatto psicologico che questo postulato è, in certo modo, di natura esistenziale, cioè afferma l'esistenza di un punto di intersezione di due rette che soddisfano a certe condizioni, senza precisare le modalità di costruzione di tale punto; invece gli altri postulati sono in certo modo di natura costruttiva, cioè quasi tutti schematizzano certe operazioni concretamente eseguibili con strumenti materiali concreti, mediante operazioni che conducono alla costruzione degli enti che vengono nominati, oppure affermano dei fatti che sono controllabili con procedimenti che si immaginano eseguibili, come il postulato che afferma che tutti gli angoli retti sono uguali tra loro.

Nel corso della storia vi sono stati vari tentativi per dimostrare la proposizione che è contenuta nel quinto postulato di Euclide; l'analisi di tali tentativi può portare, grosso modo, a classificarli in due classi: quelli grossolanamente errati, per dei paralogismi o per l'impiego di argomentazioni che sconfinano nella pseudo-filosofia, e quelli validi. A loro volta, questa seconda classe può essere ulteriormente suddivisa in due classi: quella degli autori che sostituiscono al postulato eu-

clideo un altro, che essi considerano come piú «evidente», cioè piú rispondente ad una realtà esteriore supposta esistente, e quelli che, senza avvedersene, introducono un nuovo postulato nel corso della dimostrazione, dicendo per esempio, ad un certo punto, «è evidente che...», senza aver precisato, all'inizio della trattazione, la proposizione utilizzata tra quelle «evidenti» e quindi data senza dimostrazione. Fa eccezione tra tutti il P. Gerolamo Saccheri S. J., che nel XVII sec. tentò la dimostrazione per assurdo del postulato in questione, assumendo come ipotesi la sua negazione, e poi tentando di dedurre l'assurdo da tale negazione.

La maturazione delle ricerche portò prima C. F. Gauss, e in seguito B. Riemann, JANOS BOLYAI (1802-1860) e NIKOLAI I. LOBACHEVSKI (1793-1856) alla costruzione di dottrine geometriche (cioè sistemi di proposizioni con contenuto geometrico) che prescindono dal postulato euclideo della parallela, oppure lo negano in modo esplicito, sostituendolo con proposizioni che gli sono contraddittorie.

Si ottennero cosí delle dottrine che non presentavano delle contraddizioni, almeno a prima vista; ma soltanto piú tardi si giunse, per opera di EUGENIO BELTRAMI (1835-1900), ARTHUR CAYLEY (1821-1895), e Klein, alla dimostrazione effettiva che tali dottrine non erano contraddittorie; in altre parole a dimostrare che esse erano prive di incoerenze interne, e quindi a buon diritto potevano essere chiamate «geometrie» allo stesso titolo con cui la dottrina euclidea era sempre stata chiamata con lo stesso nome.

L'aspetto apparentemente paradossale della situazione era dato dall'esistenza di dottrine che sono interiormente coerenti e, in apparenza, esteriormente contraddittorie tra loro. Una ulteriore maturazione del problema portò a distinguere, nelle dottrine che venivano chiamate geometrie, due aspetti: un aspetto puramente astratto ed un aspetto

concreto, che considera la geometria, secondo l'arguta espressione di un matematico, il «primo capitolo della fisica».

Secondo il primo aspetto, una dottrina che si presenti come geometria è un puro gioco logico, un «sistema ipotetico deduttivo», nel quale le proposizioni primitive (scelte in larga misura in modo arbitrario) costituiscono la definizione implicita degli enti dei quali esse parlano.

È interessante osservare che questa situazione conduce a prendere esplicita coscienza della necessità di rinunciare a definire tutti i termini che entrano in una teoria, come si sarebbe tentati di fare secondo un malinteso senso del rigore formale. Questa rinuncia conduce anche ad accettare la necessità di dare per noto il significato di certi termini elementari, che risulta circoscritto, non definito né spiegato completamente, attraverso il linguaggio comune, il quale - come è noto - è spessissimo equivoco e sfumato.

In un atteggiamento del genere, i termini impiegati vengono definiti implicitamente attraverso le proposizioni scelte come primitive.

Viene cosí risolto l'apparente paradosso dato dall'esistenza di dottrine contraddittorie che sembrano avere gli stessi oggetti: si tratta, infatti, di un'apparente identità di oggetti, e la confusione viene accresciuta anche dall'abitudine di utilizzare i medesimi nomi per designarli. Ma, in realtà, si tratta di enti intimamente del tutto diversi, perché definiti implicitamente da diversi sistemi di postulati.

Questo atteggiamento pone da parte sua dei problemi logici, che coinvolgono l'immagine della geometria in particolare e della matematica in generale. È chiaro infatti che, quando si accetta l'esistenza di dottrine apparentemente contraddittorie, quando si fa consistere la validità degli enunciati della geometria nella sola coerenza con i postulati

scelti, si è necessariamente condotti a rinunciare a considerare i postulati, o in generale le proposizioni primitive, come evidenti in forza dei loro contenuti, valide per il fatto che enunciano delle proprietà vere di certi enti esistenti ed aventi una loro natura ben determinata. In altre parole, in questo nuovo atteggiamento, le proposizioni primitive della geometria sono soltanto suggerite, non più imposte, dalla evidenza delle osservazioni; e la natura dello «spazio geometrico» o della «estensione», o di quell'ente qualsivoglia che veniva classicamente considerato come l'oggetto della geometria non è più là a garantire la coerenza delle proposizioni che si enunciano e che si scelgono come primitive, da non dimostrarsi.

In questa situazione, se le proposizioni primitive non rendono più le proprietà di un ente supposto esistente, se esse sono scelte con un atto largamente libero e non per la costruzione di una evidenza superiore, sorge il sospetto legittimo che nel loro sistema si possa insinuare una contraddizione nascosta, di modo che la dottrina che si basa su di esse sia intrinsecamente minata da una contraddizione, che può manifestarsi nel seguito degli sviluppi logici (in linea di principio in numero illimitato) che si possono trarre dalle premesse. D'altra parte, in questo ordine di idee, la validità dei teoremi si fonda esclusivamente sulla validità del procedimento logico che conduce alla loro dimostrazione, e non sulla loro rispondenza ad una realtà esteriore quale che sia.

Si affaccia quindi il problema della «consistenza», ovvero della coerenza logica, di un sistema di proposizioni, che parlano di enti a priori non specificati; tale problema si appaia a quello della categoricità del sistema, cioè al problema che porta a domandarsi se il sistema di enti definiti implicitamente dai postulati sia unico a meno di isomorfismi, cioè di corrispondenze biunivoche che con-

servano i rapporti e le strutture logiche, oppure se possano a priori esistere numerosi sistemi di enti che soddisfino alle stesse proposizioni, e che costituiscano – come suol dirsi – dei «modelli» del sistema di postulati.

A ben guardare, il problema era già nato nel corso della dimostrazione della compatibilità logica delle geometrie non-euclidee; infatti, questa era stata conseguita dimostrando che erano compatibili dei sistemi di postulati che consistessero nei primi quattro postulati euclidei e nella negazione del quinto. Con ciò era anche dimostrata la indipendenza di questo dai precedenti, e cioè l'impossibilità di dimostrarlo a partire da questi: infatti, se il postulato fosse dipendente dai precedenti, affermando questi ultimi si enuncerebbe implicitamente anche quello, anche se non se ne dà la dimostrazione. Constatando la compatibilità del sistema formato dai primi postulati e dalla negazione dell'ultimo si giunge, quindi, alla dimostrazione dell'indipendenza di esso dagli altri. Il raggiungimento di questi risultati fu conseguito con la costruzione di modelli che mostrassero concretamente la possibilità di dare dei «contenuti» ai postulati, contenuti che vennero costruiti con enti tratti da altri campi della matematica.

Ciò spostava soltanto il problema, ovviamente, scaricandolo sugli altri campi della matematica, ed inaugurava la problematica che doveva dare luogo al programma hilbertiano della «Beweistheorie» ed alle ricerche di K. Gödel. Allo stato delle cose, però, i tempi non erano ancora maturi per una risposta più profonda e più soddisfacente al problema.

Un secondo aspetto della geometria, che conseguiva dall'atteggiamento ricordato, era quello che conduceva a considerare questa dottrina come una teoria fisico-matematica che tratta delle nostre esperienze sugli oggetti che ci circondano, con riferimento esclusi-

vamente alla loro mutua posizione, alla loro grandezza, alla possibilità di manipolazioni senza che la forma cambi o in modo che questa cambi secondo leggi ben determinate.

In questa prospettiva va inquadrato l'atteggiamento di HERMANN VON HELMHOLTZ (1821-1894), che scelse di fondare la geometria tentando di caratterizzare, con un opportuno sistema di postulati, il gruppo dei movimenti rigidi dello spazio fisico tridimensionale. Ovviamente, seguendo questa linea logica, si accetta come primitivo il concetto di trasformazione, e si arriva a definire l'uguaglianza tra figure e a dimostrare le proprietà formali di questa relazione attraverso le proprietà formali dei gruppi di trasformazioni.

È chiaro che, quando si consideri la geometria secondo questo punto di vista, cioè come «primo capitolo della fisica», non si pone neppure il problema che porta a domandarsi quale sia la geometria «vera» dello spazio; e quindi, ancora una volta, viene superato il paradosso della apparente contraddittorietà di dottrine che parlano, a prima vista, dello stesso oggetto in termini contraddittori; infatti, non si può parlare di verità o falsità di una dottrina fisico-matematica in senso assoluto; ma soltanto della sua adeguatezza a descrivere certi oggetti, i loro rapporti, le manipolazioni che noi eseguiamo su di essi, e a prevedere i risultati delle manipolazioni stesse entro i limiti di approssimazione che sono, di volta in volta, determinati dalla questione considerata e dai risultati che si hanno in vista.

3) Considerazioni conclusive

Lo spazio che abbiamo voluto attribuire alla evoluzione della geometria nel XIX sec. è giustificato in parte dal fatto che questa dottrina si presenta come intermedia tra

l'analisi matematica pura e le applicazioni meccaniche e fisiche della matematica; quindi essa si presta, a nostro parere, a presentare in modo abbastanza efficace l'evoluzione delle idee matematiche nell'epoca che ci interessa.

Va detto, tuttavia, che la evoluzione della matematica ha portato a svuotare la geometria di contenuto con riferimento fisico esterno, per dare agli enti studiati soltanto quel contenuto che è fornito dai postulati e dalle leggi dell'algebra e dell'analisi matematica.

È chiaro, quindi, che una ulteriore evoluzione doveva portare la geometria ad essere praticamente riassorbita nelle altre branche della matematica. Si può pertanto concordare, almeno in parte, col pensiero di chi giudica che la geometria abbia oggi cessato di esistere come dottrina a sé stante, specificata dai suoi oggetti, in quanto aventi determinate proprietà la cui conoscenza è fondata su una evidenza elementare. Ciò non toglie che il linguaggio geometrico sia ancora oggi adottato dalle altre branche della matematica, come un mezzo di sintesi potente e di appello alle esperienze immediate; e, quindi, anche come stimolo a quella immaginazione euristica che fonda spesso le scoperte, prima che il ragionamento rigoroso e la critica logica le confermino e le rassodino.

3. L'analisi matematica nel XIX secolo

a) Introduzione

Abbiamo detto ripetutamente che lo sviluppo della geometria nel XIX sec. costituisce un paradigma dell'evoluzione della matematica in quel periodo; ed abbiamo osservato che questa evoluzione ha condotto so-

stanzialmente al riassorbimento della geometria, intesa come scienza di determinati contenuti, nelle altre branche della matematica. Si può dire ora che il corpo centrale della matematica del XIX sec. è costituito dall'analisi matematica; e che i progressi di questa branca della scienza contribuirono in modo fondamentale ed insostituibile a caratterizzare il metodo matematico dei periodi successivi e la fisionomia della matematica nel nostro tempo.

Daremo qui di seguito qualche cenno sullo sviluppo dell'analisi matematica nel XIX sec., avvertendo ancora una volta che la distinzione non costituisce separazione, e che prestiamo attenzione più alle gerarchie logiche che alle strette successioni cronologiche degli sviluppi concreti.

In particolare, prenderemo in considerazione i problemi della introduzione del rigore nei procedimenti dell'analisi matematica, l'ampliamento dei campi numerici, la nascita delle funzioni di variabile complessa, l'evoluzione del concetto di funzione.

b) *Il concetto di limite e la costruzione del campo reale*

Un primo momento importante dello sviluppo dell'analisi matematica nel XIX sec. è costituito senza dubbio dalla precisazione dei concetti basilari di quella dottrina che veniva chiamata «calcolo infinitesimale». Tali concetti erano stati introdotti, all'origine, sulla base della intuizione meccanica o geometrica ed erano stati giustificati in parte sulla stessa base ed in parte anche su ragionamenti dei quali l'analisi ulteriore metteva spesso in evidenza la mancanza di rigore, anche quando giungevano a risultati corretti ed accettabili.

Uno dei concetti fondamentali dell'analisi matematica classica è senza dubbio quello di limite; esso sta alla base del concetto stesso

di numero reale, e fonda il significato del concetto di convergenza di una successione e di una serie, oppure il significato del procedimento che conduce alla integrazione di una funzione in un intervallo.

Per fissare le idee, possiamo soffermarci sul concetto di limite di una successione di numeri; in questo caso, una descrizione approssimata del concetto stesso viene fatta dicendo che un numero è limite di una successione quando gli elementi di questa si «avvicinano indefinitamente» a tale limite. A questo concetto di «avvicinamento indefinito» corrisponde ovviamente quello di «allontanamento indefinito», quando si tratti di quei limiti che si conviene di indicare come infiniti.

Una ulteriore analisi, anche abbastanza superficiale, permette di scoprire nel concetto di limite due elementi essenziali che occorre precisare; in termini approssimativi, si potrebbe dire che l'uno consiste nel concetto di «avvicinamento» e l'altro consiste nell'idea che viene espressa con l'aggettivo «indefinito».

La precisazione del concetto di avvicinamento avviene in modo abbastanza semplice con la definizione del concetto di distanza: per esempio, quando si tratti di numeri, il modo più semplice ed intuitivo di precisare il concetto di distanza consiste nell'assumere come misura di questa il valore assoluto della differenza di due numeri. Le generalizzazioni sono facili quando si passa dai numeri alle coppie ordinate di numeri ed ai punti di uno spazio ad un numero qualsivoglia di dimensioni.

Per la precisazione del significato di quell'avverbio «indefinitamente», che entra nelle definizioni classiche della convergenza ad un limite, si presentano delle difficoltà di carattere logico. Infatti, l'immaginazione ci rappresenta una ripetizione indefinita di atti o di pensieri che conducono ad un allonta-

namento fino a distanze irraggiungibili, oppure ad un rimpicciolimento al disotto di ogni possibilità di osservazione. Ma ovviamente queste immagini non sono sufficienti per fondare il concetto in modo chiaro e per permettere una deduzione rigorosa.

La risposta alle richieste di chiarezza e di rigore fu data principalmente per merito delle analisi di Cauchy e di Weierstrass; si giunse, quindi, all'atteggiamento classico nel quale si definisce un numero L come limite di una data successione di numeri se, fissato in modo qualunque un numero positivo ϵ , esiste un intero n tale che l'elemento della successione che ha indice n e tutti i suoi successivi hanno da L distanza minore di ϵ .

Nello stesso ordine di idee si può giungere alla definizione del limite di un algoritmo infinito diverso dalla successione: per esempio, serie, prodotto infinito, frazione continua, ecc.

In modo pure analogo si giunge alla definizione del limite di una successione, quando esso sia infinito; e, pure con considerazioni che seguono lo stesso spirito, anche se lievemente diverse, si può definire il limite di una funzione reale di una variabile reale in un punto, e sul fondamento di questa, si può definire il concetto di continuità di una funzione siffatta.

La stessa linea di sviluppo ha seguito anche la definizione del concetto di «integrale» di una funzione reale della variabile reale. In questo ordine di idee le ricerche di Cauchy sono nella stessa direzione di quelle già iniziate dal matematico toscano P. Mengoli. Riemann precisò ulteriormente le condizioni sotto le quali è possibile parlare dell'esistenza dell'integrale di una funzione reale di una variabile reale.

Questo concetto generalizza ovviamente le concezioni che già avevano guidato prima Archimede e poi B. Cavalieri nella ricerca dell'area di una figura piana che abbia come

confine una linea non formata completamente da segmenti di retta.

La precisazione del concetto di limite di una successione portò con sé anche la costruzione rigorosa del concetto di numero reale; cioè condusse alla soluzione rigorosa del problema di rappresentare con opportuni strumenti analitici il continuo geometrico.

c) L'evoluzione del concetto di funzione

Parallelamente alla precisazione del concetto di limite si è verificato l'approfondimento del concetto di funzione, che è uno dei concetti fondamentali dell'analisi matematica. Come è noto, esso è strettamente collegato con quello di corrispondenza. Infatti, dati due insiemi A e B , quando esista una corrispondenza che ad un elemento di A , ma non necessariamente a tutti gli elementi dell'insieme stesso, faccia corrispondere uno ed un solo elemento di B , si vuol dire che questo secondo è funzione del primo.

Nella concezione elementare classica i due insiemi A e B erano coincidenti con l'insieme dei numeri reali o erano determinati sottoinsiemi di esso; un numero appartenente all'insieme A veniva chiamato «variabile indipendente» ed il corrispondente dell'insieme B «variabile dipendente»; il concetto di funzione numerica era associato strettamente alle operazioni concrete che portano da un elemento x dell'insieme A al numero che gli corrisponde. Tali operazioni erano ovviamente quelle prese in considerazione dalla matematica del tempo: operazioni razionali (somma, prodotto, differenza, divisione) e soluzioni di equazioni algebriche.

Questa visione, abbastanza ristretta, si ampliò via via in varie direzioni, che esporremo brevemente in modo sommario.

Un primo passo nella direzione dell'ampliamento del concetto venne compiuto coll'ammettere degli algoritmi più generali

per il calcolo del valore corrispondente ad un certo numero reale, oppure ad un certo insieme di numeri reali. In questo ordine di idee è da ricordare il passo fatto da Lagrange, con l'introduzione del suo concetto di «funzione analitica». Con questo atteggiamento viene in qualche modo cambiato il significato ed il ruolo delle classiche formule, note da tempo, che vengono chiamate abitualmente formule di Taylor o di Mac Laurin. Invero tali formule erano state considerate come dei mezzi per calcolare i valori di una funzione che si supponeva nota e data; mezzi che potevano far intervenire anche degli algoritmi infiniti come le serie. La novità dell'idea di Lagrange consisté nell'assumere tali formule come definitorie delle funzioni in oggetto, e di altre funzioni i cui valori vengono così definiti e calcolati metodicamente con algoritmi molto più generali di quelli utilizzati fino a quel tempo. In questa direzione un passo ulteriore fu fatto da Weierstrass, il quale utilizzò metodicamente un determinato algoritmo (la serie di potenze) per definire la funzione complessa della variabile complessa, che il Cauchy aveva introdotto. Ulteriori passi vennero compiuti assumendo degli algoritmi infiniti più generali, come le serie trigonometriche studiate da JOSEPH FOURIER (1768-1830), o le serie di funzioni.

Un secondo passo nella direzione della generalizzazione del concetto di funzione fu compiuto col prendere in considerazione delle funzioni non più date direttamente mediante algoritmi, ma mediante condizioni matematiche. Tra le condizioni contemplate più frequentemente ricordiamo qui le equazioni differenziali, cioè i legami tra una funzione e le sue derivate; in particolare alla classe di queste funzioni si possono ascrivere anche quelle che si ottengono con l'operazione di integrazione.

Pure in questo ordine di idee sono da ri-

cordarsi le funzioni implicite, cioè quelle definite mediante uno o più legami tra le variabili, ed ancora le funzioni algebriche, che si ottengono quando il legame o i legami sono costituiti da equazioni algebriche.

Ricordiamo, infine, le condizioni che si possono porre imponendo ad una funzione di rendere massimo (o minimo) un certo integrale definito. Problemi di questo genere sono stati all'origine del calcolo delle variazioni; la loro soluzione era stata ricondotta da Eulero alla soluzione di determinate equazioni differenziali, e le concezioni legate al calcolo delle variazioni hanno avuto un posto molto importante nella fisica matematica del XIX sec., che utilizzò questi concetti per la formulazione di leggi generali.

Appare naturale, quindi, che il passo finale sia stato quello di concepire una corrispondenza qualsivoglia, non legata, almeno a prima vista, a determinati algoritmi di calcolo, a determinate condizioni esprimibili con equazioni o, in generale, con relazioni matematiche.

È pure altrettanto chiaro, tuttavia, che una concezione cosiffatta conduce quasi naturalmente a sconfinare nel terreno della logica, e pone pure dei problemi che non sono puramente matematici.

d) *La costruzione del campo complesso.* *Le funzioni monogene*

L'ampliarsi delle vedute dell'algebra, della geometria e dell'analisi matematica portò in primo piano il problema della fondazione rigorosa del concetto di numero complesso.

Tale problema si può far risalire al XVI sec., perché già Bombelli aveva riconosciuto l'opportunità di ampliare il campo dei numeri reali, introducendo degli enti che soddisfano a leggi di calcolo diverse da quelle che valgono per i numeri reali. Si costruìo-

no così degli enti, che possono essere rappresentati per esempio nella forma di somma di due addendi: $a + ib$, dove a e b sono dei numeri reali e i è un ente nuovo, chiamato «unità immaginaria», che soddisfa alla legge di calcolo $i^2 = -1$; legge contraria a quelle che valgono nel campo reale, nel quale il quadrato di un numero qualsivoglia è sempre positivo o nullo.

Si constatò che, impiegando questi nuovi enti, chiamati «numeri complessi», si riesce a soddisfare a quelle equazioni algebriche che nel campo reale non hanno soluzioni. Ma la legittimità di impiego di questi enti, e la coerenza logica delle regole che reggono le operazioni su di essi, rimasero in sospenso fino a quando non si riuscì, per opera di Gauss, di Argand e di Cauchy, a darne una rappresentazione mediante i punti di un piano, e a dare dei modelli delle operazioni definite su di essi mediante contenuti geometrici. Al Gauss si deve pure la prima dimostrazione rigorosa del teorema che viene abitualmente chiamato «teorema fondamentale dell'algebra», e che afferma l'esistenza di una soluzione, nel campo dei numeri complessi, di ogni equazione algebrica i cui coefficienti sono pure reali o complessi.

La giustificazione rigorosa delle leggi di calcolo dei numeri complessi trovò presto un ampliamento geniale nel concetto di funzione complessa della variabile complessa.

In questo campo è fondamentale l'opera di Cauchy, il quale ebbe l'idea di costruire delle funzioni che si presentassero come naturale ed immediata generalizzazione al campo complesso delle funzioni reali della variabile reale, ed in particolare presentassero in ogni punto e per ogni valore della variabile una sola derivata. Cauchy chiamò «monogene» tali funzioni, e le caratterizzò attraverso certe condizioni differenziali che vengono abitualmente chiamate «condizioni di Cauchy» o anche «di Cauchy-Riemann», dal no-

me del grande matematico tedesco che pure apportò contributi fondamentali alla loro teoria. Al Cauchy si debbono i teoremi fondamentali della teoria di queste funzioni; ed occorre ricordare che ancora oggi queste costituiscono uno strumento fondamentale per lo studio di molti problemi della meccanica e della fisica matematica.

La teoria delle funzioni di variabile complessa ha permesso anche di dare risposta a vari problemi, che avevano le loro origini storiche nella matematica greca.

Abbiamo già avuto occasione di dire che molti dei problemi classici della geometria euclidea elementare vengono tradotti, tramite le convenzioni della geometria analitica, in relazioni algebriche e in problemi che conducono alla soluzione di equazioni algebriche.

Essi quindi rientrano nel campo della teoria delle funzioni di variabile complessa; infatti il campo dei numeri complessi è il più vasto campo di numeri per i quali possono essere definite delle operazioni (somma e prodotto) che hanno le proprietà formali suggerite dalla immagine geometrica tradizionale: commutativa ed associativa della somma e del prodotto, distributiva del prodotto rispetto alla somma.

In questo ordine di idee, assume particolare importanza la teoria delle funzioni algebriche, cioè delle funzioni complesse di variabile complessa definite implicitamente da una equazione algebrica. In questa teoria trova completa giustificazione il comportamento delle soluzioni di certi problemi, anche elementari, di geometria, in funzione dei dati.

e) *L'opera di G. Cantor e la teoria degli insiemi*

Abbiamo cercato di far vedere che gli strumenti dell'analisi matematica sono fon-

damentalmente collegati con certi procedimenti infiniti, e che l'analisi rigorosa del significato e della portata di questi procedimenti porta quasi necessariamente a sfiorare dei campi che appartengono piuttosto alla logica che alla matematica.

Fondamentale in questo senso è stata l'opera di Cantor, che ha lasciato un'orma indelebile nella matematica creando quella che viene detta «teoria degli insiemi». In un

1	0,	1	8	3	4	7	9	8	4	6	3	9	0	0	...
2	0,	3	6	9	4	8	5	7	0	1	1	0	9	2	...
3	0,	5	0	4	7	2	2	0	0	1	7	3	9	9	...
4	0,	9	9	8	0	1	2	3	0	1	0	9	4	8	...
5	0,	0	0	1	0	2	3	0	5	4	9	7	6	1	...
6	0	5	1	5	4	6	7	9	8	3	7	1	2	3	...
7	0,	5	5	1	1	9	8	7	1	3	5	0	4	2	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Il metodo diagonale di G. Cantor per il calcolo dei numeri «naturali» e dei numeri «reali» che costituisce la prima formulazione della teoria degli «insiemi».

primo approccio, elementare ed intuitivo, il concetto di insieme può essere assunto come primitivo; pertanto non è possibile darne una definizione formale, ma occorre lasciare la comprensione del suo significato alle conoscenze che ci vengono dal linguaggio comune, e limitarsi ad enunciare dei sinonimi (come collezione, raccolta, classe, famiglia, ecc.) e a verificare che il termine venga utilizzato in determinati modi.

La matematica anche elementare ci offre degli esempi abbastanza semplici di insiemi infiniti: tra gli altri, l'insieme dei numeri interi e l'insieme dei punti della retta o di un segmento. Vale la pena di ricordare che la problematica riguardante gli insiemi dotati di infiniti elementi era già stata incontrata nei secoli precedenti il XIX; ricordiamo tra l'altro il celebre passo di Galileo in cui si os-

serva che i concetti di tutto e di parte, validi ed apparentemente chiari quando si tratti di enti materiali e di insiemi finiti, devono essere analizzati con rigorose precauzioni logiche quando si tratti di insiemi infiniti.

Uno dei concetti fondamentali sui quali si basa la teoria cantoriana è quello di «potenza» di un insieme. In modo approssimato, si potrebbe dire che esso costituisce l'immediata generalizzazione del concetto di numero intero: supponendo di sapere che cosa si intende designare parlando di insieme finito (cioè con un numero finito di elementi), supponendo di sapere che cosa si intende per corrispondenza biunivoca tra due insiemi, il fatto che tra questi possa essere stabilita una corrispondenza biunivoca può essere considerato come una maniera diversa di dire che essi hanno lo stesso numero cardinale di elementi. Con una geniale generalizzazione di questi concetti, Cantor giunse a costruire una teoria dei numeri cardinali che egli chiamò «transfiniti», ed a stabilire una aritmetica di questi, cioè un insieme di regole di calcolo.

Egli spinse anche avanti l'analisi del continuo geometrico da questo punto di vista, con risultati a prima vista paradossali, ma profondamente innovatori del modo di concepire gli enti della geometria e della matematica.

Parallelamente, Cantor sviluppò anche una teoria dei numeri ordinali transfiniti, costruendo anche per questi enti una aritmetica.

4. La meccanica razionale e la fisica matematica

a) Introduzione

Abbiamo detto che la meccanica razionale, insieme con la geometria e il calcolo infinitesimale, forma uno dei capitoli principali della matematica superiore all'inizio del

XIX sec.; abbiamo anche detto che questa visione è rimasta valida fino ai primi decenni del nostro secolo, come è provato, per esempio, dalla struttura dei corsi universitari che preparavano alle lauree in matematica e in fisica. Quasi certamente l'importanza della meccanica nella compagine delle scienze matematiche è dovuta al prestigio dell'opera di Newton e ai successi della sua teoria della gravitazione.

Risale all'inizio del XIX sec. tutta la messe di ricerche per inquadrare anche i fenomeni che legano tra loro le cariche elettriche e le (immaginate) masse magnetiche mediante leggi matematiche ricalcate sulla legge gravitazionale di Newton.

Il prestigio che la trattazione newtoniana ha riscosso per lungo tempo è in qualche modo analogo a quello della trattazione euclidea della geometria. Ed invero la struttura metodologica delle opere di Newton è abbastanza analoga a quella che si rileva nelle opere di Euclide: enunciazione di grandi principi considerati evidenti, e pertanto accettabili nel momento stesso della loro enunciazione, deduzione rigorosa delle conseguenze. È ovvio che l'epoca di Newton possedeva degli strumenti deduttivi molto più potenti dello strumento classico utilizzato da Euclide; ma ci pare di poter dire che la struttura metodologica rimane molto analoga.

b) *La meccanica classica. I campi. La meccanica celeste*

La massa di problemi tratti dalla osservazione dei fenomeni fisici poneva una ricchissima messe di questioni e stimolava la matematica ad ampliare i propri campi di ricerca e a costruire degli strumenti sempre più potenti di indagine e di spiegazione della realtà fisica.

In particolare, le leggi fondamentali di Newton sulla relazione tra le forze che agi-

scono sui corpi e l'accelerazione di questi pongono un problema matematico importante, che richiede, per essere risolto, l'uso di uno strumento analitico classico: l'equazione differenziale.

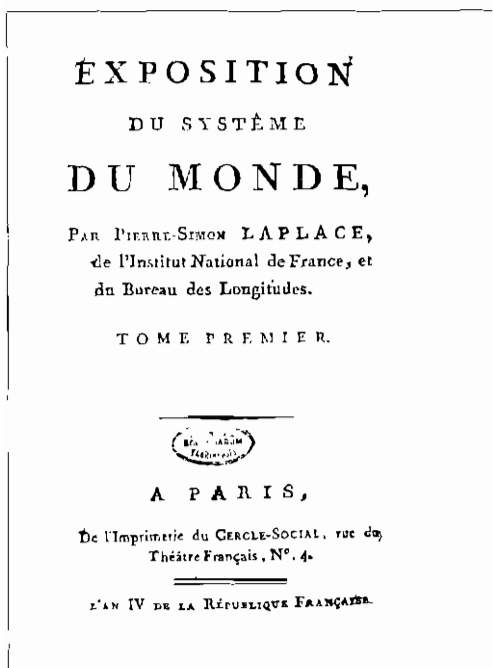
Nella impostazione dello studio dell'azione gravitazionale dei corpi, e poi delle cariche elettriche e delle supposte masse magnetiche, spicca in modo particolare la corrente di indagine che conduce allo studio dei campi di forza e, in generale, dei campi vettoriali; questi furono studiati, dal punto di vista dell'analisi matematica, da PIERRE SIMON DE LAPLACE (1749-1827), il quale diede una celebre equazione differenziale alla quale soddisfano le funzioni dei punti dello spazio; funzioni che sono dette «armoniche».

Queste funzioni, insieme con le equazioni alle derivate parziali che le definiscono e le loro generalizzazioni, hanno formato oggetto di studi e di ricerche per più di un secolo, a partire dall'epoca di Laplace; pertanto lo studio dei fenomeni del campo gravitazionale ha dato occasione alla nascita e allo sviluppo di un importante capitolo della matematica teorica.

Le idee che ispirarono la formulazione della teoria del campo gravitazionale furono applicate con successo anche alla teoria dei campi elettrici e magnetici; si giunse, così, alla formulazione dell'insieme di leggi che reggono, almeno macroscopicamente, le azioni gravitazionali e le azioni elettriche e magnetiche; azioni che vengono abitualmente rappresentate con vettori funzioni dei punti dello spazio, e vengono pensate come conseguenze della esistenza di masse materiali, o di cariche elettriche o di masse magnetiche.

c) *I sistemi di punti. Le equazioni di Lagrange*

Nella impostazione più semplice ed elementare della meccanica newtoniana classica



La prima edizione della Exposition du système du monde di P.-S. Laplace. (Imprimerie du Cercle-Social, Paris 1796).

si prendono anzitutto in considerazione delle masse puntiformi, cioè dei corpi che si pensano schematizzati in modo soddisfacente da un punto geometrico, completamente individuato dalle sue coordinate. Si presenta tuttavia immediatamente il problema di considerare il comportamento meccanico dei sistemi; cioè delle distribuzioni di materia che vengono schematizzate come aggregati di punti materiali, legati tra loro da forze che rendono ragione della coesione, o - più in generale - da legami che rendono ragione della struttura del sistema.

La trattazione teorica della statica e della dinamica dei sistemi di punti materiali ebbe inizio con d'Alembert, e fu sviluppata in pieno da Lagrange. Si deve a questo matematico, tra l'altro, l'introduzione del concetto

di coordinate essenziali di un sistema, coordinate che vengono spesso chiamate anche «lagrangiane». In questa prospettiva si fanno i primi passi in due direzioni, molto feconde anche dal punto di vista della geometria; la prima conduce a considerare le coordinate non più come delle misure di segmenti o angoli, come era abitudine delle trattazioni classiche della geometria analitica, ma come dei numeri che fissano convenzionalmente la posizione di un punto o di un sistema di punti, senza che il significato geometrico di tali numeri sia direttamente e intuitivamente interpretabile; visione questa che era adottata anche da Gauss, con la sua concezione delle coordinate generali di punti su una superficie. La seconda direzione conduce a considerare astrattamente l'insieme di numeri che determina la posizione di un sistema materiale come le coordinate di un punto in uno «spazio» avente un numero di dimensioni maggiore di tre.

Si apriva così la strada alla considerazione di quegli spazi a più di tre dimensioni, che aiutarono la geometria a superare le strettoie della cosiddetta «intuizione geometrica», cioè della elaborazione idealizzante delle esperienze concrete sugli enti della fisica, per costruire la teoria degli iperspazi.

Strettamente collegate con le ricerche di Lagrange sono quelle sulla meccanica dei continui; queste condussero all'analisi degli sforzi esistenti all'interno di un corpo, prima radice di quella teoria della resistenza dei materiali che forma il nucleo teorico della moderna scienza delle costruzioni.

Inoltre la considerazione delle coordinate essenziali (lagrangiane) di un sistema condusse in modo quasi spontaneo alla considerazione del concetto di legame olonomo e legame anolonomo di un sistema. I vincoli che si chiamano anolonomi sono dovuti a condizionamenti della mobilità del sistema che si manifestano soltanto quando il siste-

ma stesso si muove: esempio caratteristico è quello della palla da biliardo, la quale è sottoposta a vincoli olonomi (finiti) per il fatto che il suo centro (quando essa è posata sul piano del biliardo) deve stare alla distanza del raggio dal piano stesso; ma se si muove rotolando senza strisciare sul tappeto, è sottoposta a delle ulteriori costrizioni; tuttavia tali legami non si possono esprimere con relazioni finite, ma soltanto con equazioni che interessano i differenziali delle coordinate lagrangiane.

Le equazioni di questi sistemi vennero scritte in forma elegante e sintetica da GIAN ANTONIO MAGGI (1856-1937), che apportò il tocco finale alla trattazione della teoria dei sistemi materiali brillantemente iniziata da Lagrange.

d) *Il superamento della meccanica classica.*

I fenomeni irreversibili. Teoria del calore e termodinamica

Abbiamo detto dell'influenza che le leggi di Newton hanno avuto sulla matematica e sulla fisica dei secoli successivi; e veramente non poteva non essere così, vista la semplicità e l'eleganza delle leggi stesse e la massa dei fenomeni che esse spiegavano in modo quasi perfetto.

È facile tuttavia osservare che, anche a quei tempi, esistevano molti fenomeni che non entravano nello schema newtoniano; una caratteristica essenziale di questo schema è quella di considerare fenomeni essenzialmente reversibili; in altre parole, nelle equazioni della dinamica di Newton il tempo potrebbe essere cambiato di segno, senza che le leggi mutino il loro aspetto. In forma intuitiva, si potrebbe dire che l'Universo funziona come un meccanismo, il cui moto può essere invertito senza sovvertirne le leggi. Tuttavia è facile osservare che i fenomeni che interessano il calore sfuggono alla tratta-

zione di Newton e alle leggi ricalcate sulla concezione newtoniana.

Infatti il fenomeno della trasmissione del calore presenta un aspetto peculiare, la irreversibilità, che non è presente negli altri fenomeni di cui abbiamo detto: ancora oggi si suole esprimere la seconda legge della termodinamica dicendo che, per esempio, il calore non passa spontaneamente da un corpo più freddo ad uno più caldo.

Pertanto si può dire che le necessità tecniche e teoriche dello sfruttamento dell'energia termica posero alla fisica e alla matematica dei nuovi problemi, e stimolarono lo sviluppo di nuovi strumenti teorici. Già abbiamo parlato dell'opera di Fourier, che impostò lo studio del movimento del calore mediante equazioni differenziali, e fu condotto ad introdurre una concezione del tutto nuova del concetto di funzione, proprio dalla necessità di rappresentare una distribuzione «arbitraria» del calore. Dai problemi del movimento del calore si passò presto a quelli della termodinamica, cioè dei rapporti tra il calore e le altre forme di energia.

Questa dottrina doveva raggiungere la sua espressione più elegante e completa con RUDOLF CLAUSIUS (1822-1888) e JOSIAH WILLARD GIBBS (1839-1903), e doveva utilizzare gli strumenti forniti dalla matematica per indagare a fondo i fenomeni irreversibili.

L'impostazione statistica della ricerca, dovuta principalmente a LUDWIG BOLTZMANN (1844-1906) dava un'altra direzione a queste teorie, coinvolgendo in esse quella teoria della probabilità che era stata ripresa ed elaborata matematicamente da Laplace all'inizio del secolo.

Accanto all'osservazione, più volte ripetuta, che riguarda lo stimolo che questi problemi hanno dato alle ricerche teoriche di matematica, vorremmo anche ricordare che, inversamente, l'intuizione fisico-matematica ha talvolta guidato i matematici ad accettare

l'esistenza della soluzione di certi tipi di equazioni differenziali alle derivate parziali, proprio in base al possibile significato fisico delle equazioni stesse. Così avvenne, per esempio, in relazione ai classici problemi di esistenza di soluzioni con determinate condizioni al contorno.

e) *I grandi principi della fisica matematica.*

Conservazione e ottimizzazione

La tendenza alla enunciazione di leggi generalissime della meccanica e della fisica ha mobilitato la matematica per la ricerca di strumenti teorici adatti.

Spesso tali leggi molto generali vengono chiamate convenzionalmente «principi» della meccanica o della fisica.

Con queste leggi si giunge a descrivere l'evoluzione di un sistema di punti, o di un sistema fisico in generale, dicendo che, tra tante evoluzioni possibili, quella che si realizza in pratica ottiene l'ottimizzazione di certi valori, o la conservazione di certe entità definite generalmente su tutto il sistema.

Per quanto riguarda le leggi di conservazione, è noto che, in presenza di campi di forze del tipo che viene chiamato «conservativo» (cioè che non ammette la creazione dal nulla di entità che non si possano spiegare), la grande legge della conservazione della materia, enunciata dai chimici, viene completata dalla legge della conservazione dell'energia sotto le varie forme che essa può presentare.

L'evoluzione in senso privilegiato del tempo dei sistemi fisici concreti, in presenza di fenomeni che coinvolgano il calore, viene precisata come tendenza della energia a prendere spontaneamente certe forme piuttosto che certe altre, con una impostazione analoga a quella adottata da Boltzmann nello studio della evoluzione della folla di molecole che costituisce un gas reale.

Nel caso della ottimizzazione, invece, si potrebbe dire che questa tendenza alla enunciazione di grandi principi è stata ereditata dalla matematica del XVIII sec., che aveva visto gli esordi del calcolo delle variazioni. A loro volta i problemi posti dalla fisica matematica hanno conferito un grandissimo impulso a questa branca della matematica.

Le ricerche che si muovono nella direzione della enunciazione delle leggi generali secondo i grandi principi, traggono la loro origine dai lavori di Lagrange e di d'Alembert. Sulla scia di Lagrange, la meccanica si svincolò dal significato geometrico diretto delle coordinate cartesiane o polari, per adottare una visione molto più generale del concetto di coordinate, tanto per quanto riguarda la loro natura che per quanto riguarda il loro numero.

Tra i principi che, più o meno direttamente, hanno questo carattere di riconduzione all'unità delle fondamentali leggi fisiche, ricordiamo il principio della minima costrizione dei vincoli di Gauss, il principio dell'azione stazionaria (che generalizza, per opera di Holder, quello di Maupertuis, enunciato già nel secolo precedente), e infine il principio di Hamilton, che permette anche una trattazione analitica diretta dei problemi del moto dei sistemi, attraverso certi strumenti classici di calcolo, che ancora oggi fanno parte di quella che si chiama abitualmente meccanica analitica.

5. I nuovi rami della matematica

a) *Introduzione*

Nel XIX sec. la matematica ha vissuto una crisi di rinnovamento che le ha fatto prendere, alla fine del secolo, una fisionomia del tutto diversa da quella che aveva all'inizio. Abbiamo già cercato di confortare que-

sta nostra affermazione analizzando a titolo di esempio l'evoluzione della geometria.

Tuttavia l'evoluzione della matematica non si limita alla sparizione della geometria, intesa nel senso classico come scienza di determinati contenuti spaziali. Essa si esplica anche con la nascita di nuovi rami sul vecchio tronco di una scienza che qualcuno potrebbe immaginare come fissa ed immutabile; e questa nascita ha condotto gradualmente ad una situazione nella quale quelli che erano considerati i punti fondamentali della matematica del XVIII sec. (concretizzati nella geometria, nell'analisi matematica, nella meccanica razionale) vedono variare i loro rapporti reciproci, e talvolta perdono anche di importanza, in favore di altri.

Tra i personaggi nuovi che si affacciano alla ribalta, vorremmo qui toccare brevemente l'algebra, la topologia, il calcolo delle probabilità, la logica formale. E ricordiamo soltanto questi perché la loro apparizione ci sembra notevolmente sintomatica e il loro carattere aiuta a comprendere lo sviluppo della matematica successiva, in particolare quella del nostro secolo.

Prima di accingerci a presentare brevemente questi capitoli che abbiamo chiamato «nuovi» della matematica, vorremmo tuttavia osservare che, da un certo punto di vista, la loro novità potrebbe essere intesa in senso abbastanza relativo e ristretto, e si potrebbe anche distinguere tra la novità non sempre clamorosa dei contenuti e un modo abbastanza nuovo di prendere coscienza dei rapporti di questi contenuti rispetto agli antichi oggetti della matematica.

b) *La teoria dei gruppi. La teoria delle equazioni. Nascita dell'algebra astratta*

L'invenzione dei numeri complessi e lo studio delle loro proprietà aveva ampliato il campo degli enti ai quali si applicano le ope-

razioni dell'algebra classica. Rimanevano senza risposta, all'inizio del XIX sec., alcuni annosi problemi, che risalivano al XVI sec. e che riguardavano la soluzione delle equazioni algebriche. Abbiamo visto come Gauss abbia dimostrato rigorosamente che esiste almeno una soluzione complessa di una equazione algebrica i cui coefficienti sono dei numeri complessi; ma rimaneva insoluta la questione riguardante gli strumenti algebrici che permettono di esprimere le soluzioni delle equazioni in funzione dei loro coefficienti. Probabilmente la possibilità di esprimere mediante radicali quadratici e cubici le soluzioni delle equazioni dei primi quattro gradi (cioè fino al quarto grado incluso) aveva indotto i matematici ad insistere nella ricerca delle soluzioni delle equazioni algebriche generali mediante mezzi di questo tipo.

Un primo risultato negativo fu raggiunto da PAOLO RUFFINI (1765-1822), e perfezionato poi da ABEL; entrambi dimostrarono che non è possibile esprimere le radici di un'equazione algebrica generale di grado superiore al quarto mediante espressioni che contengano delle funzioni dei coefficienti di un dato tipo: precisamente, funzioni razionali oppure ottenute con radici di ordine intero qualsivoglia in numero finito.

Abbiamo già detto che l'indagine su questi problemi condusse ad analizzare la struttura di certe operazioni e la loro composizione.

Si faceva così strada l'idea e la consuetudine di operare su certe «cose» che non sono numeri, per le quali tuttavia si potevano definire dei «prodotti»; peraltro per questi nuovi «enti» l'operazione di prodotto non ha tutte le proprietà del prodotto tra due numeri: per esempio essa non è, in generale, commutativa.

Si giunse, così, alla costruzione del concetto di «gruppo»; all'inizio, questo concetto era legato al concetto di insieme di operazioni in numero finito; tali sono, per esempio, le ope-

razioni di sostituzione tra un numero finito di elementi. Ma il concetto si estese poi alla considerazione di operazioni in numero infinito, così come è stato fatto da Klein.

EVARISTE GALOIS (1811-1832) collegò genialmente il concetto di gruppo con il problema della soluzione delle equazioni algebriche, e, in particolare, lo applicò alla soluzione di queste equazioni mediante certe espressioni e certe funzioni (i radicali, per esempio), aventi proprietà e leggi formali ben definite. In questo ordine di idee, l'opera di Galois è fondamentale e chiude definitivamente una serie secolare di ricerche, aprendo a sua volta un nuovo campo di studi.

Il concetto di «gruppo» ebbe una evoluzione sempre più rapida e si distaccò sempre più dalla particolare realizzazione che aveva dato occasione alla sua introduzione e alla sua utilizzazione. Quelle leggi «strane» di prodotto condussero ad altri studi e portarono i matematici ad altri punti di vista, dai quali l'attenzione viene rivolta non tanto ai contenuti, agli oggetti tradizionali, ma alle operazioni stesse, alla struttura logica delle leggi di calcolo che si inventavano e si costruivano.

Apparvero così dei «nuovi» numeri, come i quaternioni di Hamilton ed i numeri di Clifford; si sviluppò un insieme di teorie che studiavano le operazioni di composizione che hanno proprietà nuove rispetto a quelle dell'algebra tradizionale dei numeri complessi.

Si cercarono delle interpretazioni concrete di questi nuovi enti; alcuni di essi, come per esempio i quaternioni di Hamilton, furono inventati per risolvere certi problemi di geometria e di meccanica, ma la strada era aperta per lo sviluppo dell'algebra nel senso moderno del termine; una dottrina, cioè, non caratterizzata dal fatto di studiare certi oggetti abituali, bensì una dottrina che analizza le strutture stesse delle operazioni ese-

guibili su certi simboli; operazioni che possono essere arbitrariamente definite, con leggi che sono in larga misura convenzionali e che debbono tuttavia essere soddisfatte per la coerenza fondamentale della ricerca.

In questo ordine di idee, rimane aperta la questione di garantire la coerenza logica di leggi siffatte date arbitrariamente; tale problema, abbiamo visto, sussiste anche nel caso della geometria considerata come sistema ipotetico deduttivo; ed invero, se si abbandona l'idea che la realtà sia il fondamento delle proposizioni iniziali, fondate sulla evidenza immediata dei contenuti di osservazione, occorre fondare queste proposizioni iniziali su qualche cosa che garantisca che il nostro lavoro deduttivo non sia vano, che la dottrina deduttiva che si costruisce, anche se ha pochi agganci (e forse nessuno) con la realtà, possa tuttavia essere certa di non nascondere in sé contraddizioni e quindi non abbia il carattere della autodistruzione.

c) *Le origini della topologia*

Un secondo capitolo della matematica che nasceva verso la fine del XVIII sec. e che doveva subire durante il XIX sec. uno sviluppo rigoglioso è quello della topologia.

È abitudine diffusa far risalire ad Eulero l'inizio degli studi che riguardano la topologia; in particolare, si ricorda la soluzione data da questo matematico al celebre problema dei sette ponti di Königsberg e il teorema da lui dimostrato (la cui origine tuttavia è da far probabilmente risalire a Cartesio) sul legame che intercorre tra i numeri degli spigoli, dei vertici e delle facce di un poliedro convesso. Quest'ultimo teorema si mantiene valido quando si immagini il poliedro realizzato con materiale deformabile, e si immagini appunto di sottoporre la figura ad una deformazione continua, senza lacerazioni o du-

plicazioni.

Si giunge, anche se in modo rudimentale, a quella nozione di topologia come dottrina delle proprietà delle figure deformabili con continuità, che costituisce il fondamento intuitivo della branca della matematica che porta questo nome, anche se non la esaurisce in pieno.

Occorre dire che anche la fisica matematica, ed in particolare l'elettrologia, diede stimolo a studi di questo tipo, che portarono Gauss a dare la formula per calcolare l'annodamento di due curve chiuse nello spazio, o di una curva chiusa con se stessa. Invero nel calcolo del lavoro eseguito da una carica magnetica lungo un circuito chiuso, entra in modo determinante il fatto che il circuito abbracci oppure no il filo lungo il quale scorre una corrente.

Già abbiamo detto delle riemanniane, cioè delle superfici che Riemann ideò per descrivere il comportamento delle funzioni algebriche; tali superfici forniscono un altro esempio di utilizzazione di proprietà topologiche: si sa che, in generale, le superfici di Riemann non ammettono modelli privi di singolarità nello spazio abituale a tre dimensioni, quindi esse non possono essere immaginate come materialmente realizzate con modelli semplici, ma proprio per questo si può immaginare di deformarle in un modo qualunque, e realizzarle in modi diversi, ma tutti equivalenti ai fini delle proprietà topologiche.

Analisi ulteriori portarono alla scoperta di superfici che hanno una sola faccia; tale è, per esempio, la superficie nastriforme che, dal nome del suo inventore, viene abitualmente chiamata «nastro di Möbius»; oppure tale è la superficie chiusa, immaginata da Klein, che viene chiamata «bottiglia di Klein».

Si faceva strada, quindi, l'analisi delle proprietà delle figure dello spazio che fosse-

ro fondate su esperienze più elementari di quelle che fondano la geometria nel senso euclideo del termine. Questa si basa essenzialmente sulle esperienze del trasporto rigido dei corpi; esperienze che sono notevolmente complesse e composite nella loro genesi psicologica, perché coinvolgono esperienze di tipo tattile, muscolare e di proiezione. Invece le esperienze sulle quali si fonda, almeno in origine, la topologia sono relativamente più elementari, e si riducono sostanzialmente a riguardare la contiguità dei punti, la vicinanza, la coincidenza, e così via.

A questi studi di topologia, che si potrebbe chiamare «in grande», si affiancano le analisi di quella che si potrebbe chiamare «la topologia del continuo». Di essa abbiamo già detto e vogliamo qui ricordare ancora una volta i contributi fondamentali di Cantor sulla dottrina del continuo geometrico; più precisamente a proposito del problema della espressione con termini rigorosi e precisi dell'idea del continuo geometrico, che noi ci formiamo attraverso le nostre esperienze e la rielaborazione idealizzante di queste.

d) *Il calcolo delle probabilità. La matematica dell'incerto*

Un terzo ramo della matematica, che ha avuto un significativo sviluppo durante il XIX sec., è stato il calcolo delle probabilità. Non stiamo a ripetere quanto si sa della nascita di questa branca della matematica nel XVII sec.; ci limitiamo ad osservare che l'opera di Laplace, che segna in certo modo l'inizio di una costruzione sistematica di questa branca della matematica, chiude per altri versi un periodo di evoluzione durante il quale il calcolo delle probabilità era stato coltivato anche da matematici illustri, che avevano messo in evidenza i suoi collega-

menti con i problemi della logica induttiva e della statistica.

Può essere interessante osservare che l'entrata del calcolo delle probabilità sulla scena, è segno ed occasione insieme di un cambiamento di significato della matematica, che si manifesta con altri segni in molti altri campi.

In relazione all'avvento del calcolo delle probabilità si potrebbe dire che la matematica manifesta un interessante cambiamento del proprio carattere tradizionale: partendo dalla immagine di scienza paradigma della certezza trasparente (almeno nelle idee correnti) essa si presenta sempre più come una scienza le cui deduzioni sono le più certe possibili, ma che non può addossarsi la responsabilità della certezza dei punti di partenza. In altre parole, la matematica si presenta come una scienza capace di dare la massima certezza alle deduzioni; le quali, però, possono partire da premesse e da dati materialmente incerti ed anche aleatori.

In questo ordine di idee, le analisi di Laplace conservano la loro validità, anche se oggi il concetto di probabilità è più frequentemente presentato partendo dall'atteggiamento soggettivo di un individuo che giudica del proprio impegno economico (in senso anche lato del termine) a proposito di un evento sul quale egli ha informazioni incomplete.

Non possiamo soffermarci qui a rilevare quanto sia importante il concetto teorico di probabilità per le scienze sociali e per le applicazioni della statistica alla fisica matematica; ci limitiamo a ricordare il collegamento tra il concetto di probabilità e la teoria degli errori di osservazione, iniziata dal Gauss. Con questa evoluzione si fa strada sempre più l'immagine della matematica che è, in certo senso, il linguaggio privilegiato della fisica, ma che è pure un linguaggio del quale occorre comprendere ed analizzare bene il significato e i limiti.

e) *L'algebra di Boole, la logica formale e i fondamenti della matematica*

Vorremmo, infine, ricordare un capitolo della matematica che nel XIX sec. ha presentato uno sviluppo particolare; è il dominio che è a contatto diretto con la logica formale e che costituisce uno dei più importanti rami della matematica moderna.

Le origini di questa dottrina possono essere ricercate molto lontano: a rigor di termini anche la logica formale classica aveva le caratteristiche di una specie di calcolo delle proposizioni, perché insegnava a dedurre delle proposizioni vere da altre supposte o accettate come vere, a partire dalla sola forma delle proposizioni stesse.

Tuttavia, benché la logica formale (detta «minore») classica mirasse, in fondo, alla manipolazione delle proposizioni a partire dalla sola forma di queste e non dai contenuti, mancava in essa la presenza del simbolismo artificiale astratto, che è invece caratteristico della logica modernamente intesa, e che accosta questa dottrina all'algebra astratta.

Si trovano, invece, delle premonizioni molto chiare della situazione moderna in Leibniz, che preconizzava il tempo in cui due filosofi non avrebbero disputato più con discorsi lunghissimi ed inconcludenti, ma seduti ad un tavolo (magari insieme con un amico) avrebbero preso in mano la penna dicendo: «Calulemus».

Si potrebbe dire che l'atteggiamento di Leibniz manifesta abbastanza bene quelle esigenze di univocità dei simboli, di meccanicità e certezza delle deduzioni, che sono tra le caratteristiche tipiche del linguaggio matematico.

Queste considerazioni conducono a spiegare, almeno in parte, l'adozione di un simbolismo ideografico nella logica formale; simbolismo che fosse atto a superare gli

equivoci del linguaggio vivo, e permettesse di enunciare le leggi della deduzione come delle leggi di un calcolo algebrico.

Si suole attribuire a GEORGE BOOLE (1815-1864), il merito di aver iniziato questo atteggiamento. Egli adotta dei simboli per esprimere direttamente le idee, e definisce delle operazioni, alle quali conserva ancora il nome di «somma» e «prodotto», delle quali egli rileva le proprietà «strane» rispetto alle operazioni omonime che valgono per i numeri.

Egli creava così una vera e propria algebra, che è il germe della dottrina ancora oggi chiamata «algebra di Boole», e che trova numerose e svariate applicazioni teoriche e pratiche. Pertanto, la nascita di quest'algebra «strana» si accompagna alla nascita delle altre algebre di cui abbiamo già detto; si manifesta così sempre di più quella evoluzione del pensiero che doveva portare i matematici a concentrare la loro attenzione più sulle strutture delle operazioni che sugli oggetti sui quali esse operano.

La creazione di nuovi strumenti per la

logica fu stimolata dagli studi che portarono anzitutto a rendere rigorosi i ragionamenti tradizionali del calcolo infinitesimale, e poi a sondare i fondamenti della geometria e dell'aritmetica.

In questa analisi sono da ricordare in modo particolare i contributi di GOTTLIB FREGE (1848-1925) e di G. PEANO. Entrambi furono condotti ad inventare, in modo indipendente tra loro, delle ideografie logiche, che permettessero di realizzare l'ideale leibniziano di cui abbiamo già detto.

In particolare, si deve a Peano l'atteggiamento che porta a rinunciare a definire il numero intero attraverso discorsi più o meno filosofici, e invece a precisare la natura dell'insieme degli interi (e di qualunque insieme ad esso isomorfo) con una definizione implicita data da un insieme di proposizioni primitive: si tratta di quelle proposizioni che ancora oggi sono chiamate «assiomi di Peano» e che circoscrivono il concetto di numero intero, permettendo di dimostrare rigorosamente le leggi dell'aritmetica intuitiva elementare.